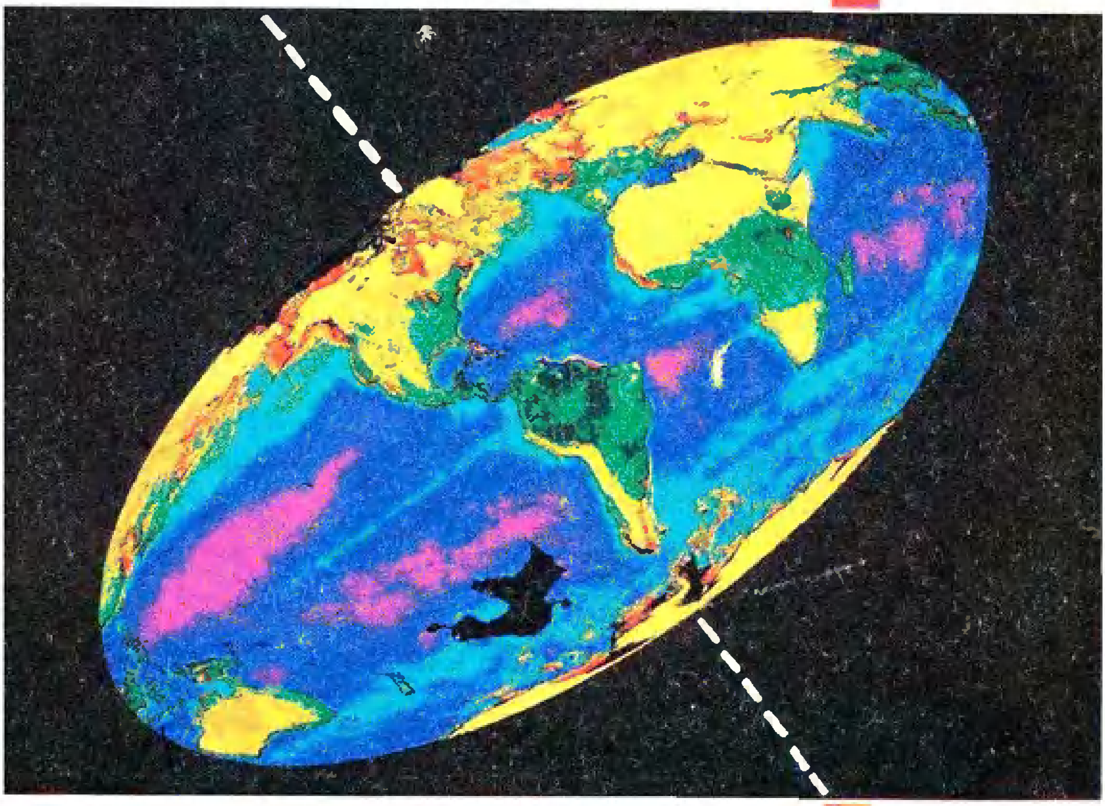
ISSN 0130-2221

Квант

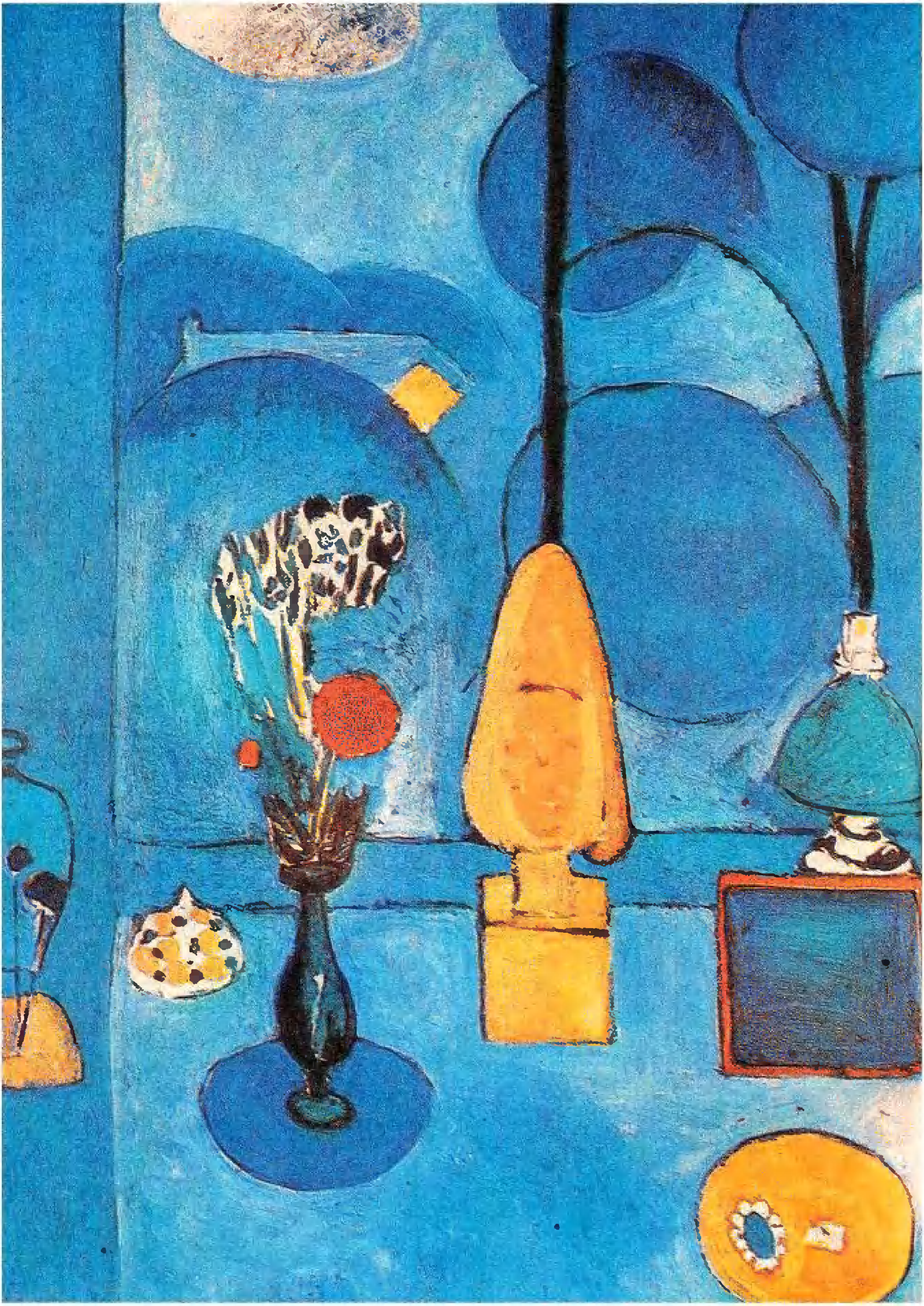
Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



15 миллиардов лет после начала...

1992



Квант

10 1992

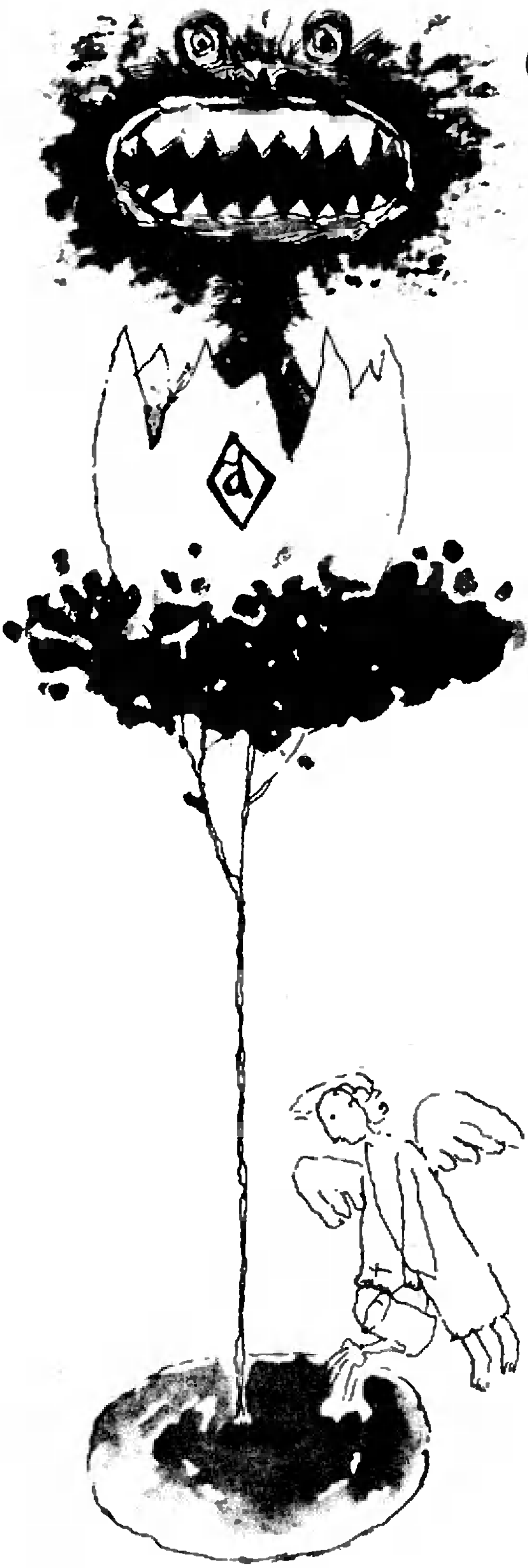
Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской Академии наук,
Президиум
Российской
Академии образования
и коллектив редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:



ДЕМОКРАТИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

В. ПАХОМОВ

Можно было бы привести еще массу правил голосования и парадоксов, чтобы убедиться в отсутствии абсолютно хорошей демократической системы. Все это наводит на печальную для многих мысль, что демократии как волеизъявления большинства не существует, ибо не существует, как мы видели, самого понятия «мнение большинства»...

Функция коллективного предпочтения

Поставим несколько более общую задачу. Пусть n членов парламента определяют систему приоритетов государственного финансирования m различных программ. Скажем, в первую очередь средства выделяются на здравоохранение, из оставшейся части бюджета — на программу образования, затем из остатка — на программу строительства жилья и т. д. У каждого члена парламента есть свое мнение по поводу упорядочения этих статей расхода. Необходимо построить их упорядочение, отражающее мнение парламента в целом.

Поскольку между упорядочением государственных программ и упорядочением кандидатов нет никакой разницы с математической точки зрения, мы по-прежнему будем говорить для удобства об избирателях и кандидатах вместо парламентариев и программ. Итак, имеется n избирателей и m кандидатов. Требуется

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 9.

построить функцию, определяющую коллективный порядок на множестве кандидатов, т. е. правило, которое для любых заданных порядков $\overset{1}{\succ}$, $\overset{2}{\succ}$, ..., $\overset{n}{\succ}$ определяет коллективный порядок $\overset{s}{\succ}$:

$$\overset{s}{\succcurlyeq}=f(\overset{1}{\succ}, \overset{2}{\succ}, \ldots, \overset{n}{\succ}).$$

Здесь мы предполагаем три возможности при парных сравнениях кандидатов, скажем, a и b:

$$a\overset{s}{\succ}b \text{ (} a \text{ лучше } b\text{)},$$

$$a\overset{s}{=}b \text{ (} a \text{ и } b \text{ одинаковы)},$$

$$a\overset{s}{\prec}b \text{ (} a \text{ хуже } b\text{)},$$

и их комбинации типа

$$a\overset{s}{\succcurlyeq}b \text{ (} a \text{ не хуже } b\text{)}.$$

Таких функций может существовать много. Например, f может объявлять всех кандидатов равными. Поэтому необходимо наложить на f какие-то ограничения. Прежде всего она должна быть определена для любого (конечного) числа кандидатов. Например, для двух кандидатов все перечисленные правила голосования совпадают, поэтому функция f в этом случае строится легко: либо кто-то из двух кандидатов выигрывает и, значит, занимает первое место (а противник — второе), либо выясняется, что они равны. Например, для профиля

Избиратель	1	2	3	4	5	6
Кандидаты	a b	a b	b a	a b	b a	a b

эквивалентного профилю

Группа избирателей	{1, 2, 4, 6}	{3, 5}
Кандидаты	a b	b a

имеем $a\overset{s}{\succ}b$ по любому из правил голосований. Для профиля

Группа избирателей	{1, 2, 5}	{3, 4, 6}
Кандидаты	a b	b a

ни одно из наших правил не дает победителей, поэтому следует считать $a\overset{s}{=}b$.

Однако эти правила следует еще доопределять для случаев, когда число кандидатов более двух. Простейший способ заключается в следующем.

Пусть M — множество кандидатов, а p — правило выборов. Обозначим победителей (их может быть несколько) символом $p(M)$. Они займут первое место. Затем исключим из M этих победителей, в результате получим новое множество $M_1=M\backslash p(M)$. Применяя к нему правило p, получим множество $p(M_1)$ победителей из M_1, они займут второе место. Исключая из M_1 этих победителей, получим множество $M_2=M_1\backslash p(M_1)$ и т. д. В результате получаем функцию f.

Разберем несколько примеров.

Пусть p — правило относительного большинства. Рассмотрим профиль H ($n=3$, $M=\{a, b, c, d\}$):

Профиль H

Избиратель	1	2	3
Кандидаты	a b c d	d a b c	b c d a

Правило относительного большинства дает по одному голосу для a, d, b, следовательно $p(M)=\{a, b, d\}$. Они занимают первое место, а оставшийся кандидат c займет второе. Значит, f сопоставляет профилю H порядок

$$a\overset{s}{=}b\overset{s}{=}d\overset{s}{\succ}c.$$

Рассмотрим эту же функцию на профиле A. Имеем $p(A)=\{a\}$, $A_1=\{b, c, d\}$, а соответствующий профиль A_1 даст $p(A_1)=\{d\}$ и $A_2=\{b, c\}$:

Профиль A_1

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	d c b	d b c	b c d	c d b

Профиль A_2

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	c b	b c	b c	c b

Наконец, из профиля A_2 видно, что $p(A_2)=\{c\}$, т. е. f задает порядок

$$a \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} b.$$

Правило абсолютного большинства порождает свою функцию f, которая, правда, не является определенной для всех профилей (например, для профиля H), а для профиля A дает (проверьте!) порядок $b \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} a$, в точности противоположный порядку по правилу относительного большинства.

Правило Кондорсе также определено не для всех профилей, но для профиля A дает (проверьте!) порядок $c \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} b \overset{s}{\succ} a$.

Наконец, правило Борда при нашем способе определяет функцию f, которая профилю A сопоставляет порядок $d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} b \overset{s}{\succ} a$.

Заметим, что правило Борда может и непосредственно определять функцию f: достаточно расставить кандидатов в порядке убывания их очков. Это дает для профиля A порядок $d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} a \overset{s}{\succ} b$. Как видите, при таком определении порядка худшим оказался b.

Итак, все правила достаточно разумны, *но* приводят к совершенно различным результатам, вплоть до противоположных. Чтобы добиться однозначного результата, попробуем предъявить некоторые требования к функции коллективного предпочтения, которые сформулируем в виде аксиом. Обозначим для удобства множество избирателей через S.

А к с и о м а 1 (полнота). *Для любых кандидатов a и b коллективный порядок устанавливает, что либо $a \overset{s}{\succ} b$, либо $a=b$, либо $a \overset{s}{\prec} b$.*

А к с и о м а 2 (транзитивность). *Если $a \succ b$ и $b \succ c$, то $a \succ c$.*

Первая из аксиом говорит о том, что мы можем сравнить любых двух кандидатов, а вторая естественна для любого порядка, без нее может возникнуть ситуация, в которой a лучше b, b лучше c и c лучше a.

А к с и о м а 3 (единогласие). *Если все избиратели считают, что a лучше b, то и в коллективном предпочтении a лучше b.*

Эта аксиома не вызывает сомнения и не позволяет строить такое правило, при котором «все равны».

А к с и о м а 4 (независимость). *Положение любых двух кандидатов a и b зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных предпочтениях избирателей и не зависит от расположения других кандидатов.*

Например, профили

Избиратели	1	2	3	4
Кандидаты	a b c	c a b	b c a	a b c

Избиратели	1	2	3	4
Кандидаты	a c b	a c b	b a c	c a b

вообще говоря, различны, но относительное положение a и b у всех избирателей одинаково: избиратели 1, 2 и 4 считают a лучше b, и только третий избиратель считает b лучше a. В этом случае функция коллективного предпочтения должна и для одного и для другого профиля расположить a и b одинаково. Это могут быть, скажем, порядки $a > b > c$ и $a > c > b$ соответственно (они даются здесь правилом Борда). Отказ от аксиомы независимости приводит к возможности манипуляций: как мы уже видели, снятием (а значит, и введением) кандидатуры можно изменить взаимное расположение остальных кандидатов для правила Борда (сравните профили D и E).

Приведем один пример функции коллективного предпочтения, удовлетворяющей всем этим аксиомам:

$$f(\overset{1}{\geqslant}, \overset{2}{\geqslant}, \dots, \overset{n}{\geqslant}) = \overset{1}{\geqslant}.$$

Эта функция задает *правило диктатора:* независимо от предпочтения других избирателей она устанавливает тот порядок, который определяется первым избирателем. Разумеется, вместо первого можно было бы взять второго, третьего, n-го избирателя — суть дела не меняется. Меняется лишь диктатор.

Теорема Эрроу

Неожиданный для многих результат Эрроу заключается в том, что при всей разумности наших аксиом *единственное правило, которое им удовлетворяет, и есть правило диктатора.*

Для доказательства этой теоремы введем несколько важных понятий. Подмножество A множества избирателей S назовем *коалицией.* Будем называть коалицию *f-решающей для кандидата a против кандидата b* тогда и только тогда, когда из того, что все члены коалиции ставят a выше b, а все, не входящие в нее, ставят b выше a, следует $a \overset{s}{\geqslant} b$. Другими словами, для профилей вида

Группа избирателей	Кандидаты
A	$\dots a \dots b \dots$
$S \setminus A$	$\dots b \dots a \dots$

где точки означают произвольное расположение других кандидатов, функция f определяет порядок типа

$$\dots \overset{s}{\geqslant} a \overset{s}{\geqslant} \dots \overset{s}{\geqslant} b \overset{s}{\geqslant} \dots$$

Этот факт будем кратко записывать так: $A = f(a, b)$. Отметим, что A зависит от *конкретных кандидатов a* и b и не обязана быть f-решающей для c против d. Наконец, *если для любых двух кандидатов x и y коалиция A является f-решающей для x против y,* будем называть ее *f-решающей.*

Для f-решающей коалиции теперь не важны имена кандидатов: если члены коалиции ставят кого-либо выше другого, а все остальные избиратели располагают этих кандидатов в точности наоборот (а не как-нибудь!), то в групповом предпочтении выше стоит тот, кого выше поставила коалиция.

Отметим, что все множество избирателей S является «предельным» случаем f-решающей коалиции, ибо для него это определение, безусловно, верно в силу аксиомы единогласия.

По этой же причине пустое множество не может быть f-решающим для a против b ни при каких a и b: если никто не ставит a выше b, т. е. все ставят b выше a, то в силу аксиомы единогласия $a \overset{s}{<} b$, и, значит, не может быть $a \overset{s}{\geqslant} b$.

Лемма 1. *Существует пара (a, b), для которой найдется коалиция D, состоящая из одного избирателя $\{d\}$, такая, что d является f-решающей для a против b.*

Доказательство. Обозначим через F множество таких коалиций A, для каждой из которых существует такая пара (a, b), что $A = f(a, b)$ (для каждой коалиции из F — своя).

Множество F не пусто, так как включает множество всех избирателей S. Возьмем коалицию D из множества F, содержащую наименьшее число избирателей. Так как F не пусто, то D содержит не менее одного избирателя. Требуется доказать, что он там и будет ровно один.

Таким образом, если предположение о том, что их там не менее двух, приведет к противоречию, то лемма будет доказана.

Итак, предположим, что D можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества: одно $\{d\}$, состоящее из одного элемента, а другое E — из всех остальных.

Рассмотрим теперь профиль

Группа избирателей	$\{d\}$	E	$S\setminus D$
Кандидаты	a b c	c a b	b c a

Так как коалиция D — f-решающая для a, b, то $a \overset{\bullet}{\succ} b$. Если $c \overset{\bullet}{\succ} b$, то это означает, что коалиция E является f-решающей для c против b. Но в E меньше избирателей, чем в D, которая по определению минимальна. Полученное противоречие показывает, что c не может быть не хуже b. Значит, в силу аксиомы полноты, b лучше c.

Теперь имеем $a \overset{\bullet}{\succ} b$, $b \overset{\bullet}{\succ} c$, откуда, в силу аксиомы транзитивности, получаем $a \overset{\bullet}{\succ} c$. Но это значит, что $\{d\}$ является f-решающей для a против c, что также противоречит минимальности D.

Таким образом, мы пришли к противоречию; и лемма доказана.

Лемма 2. *Коалиция $D=\{d\}$, существование которой доказано в предыдущей лемме, является f-решающей.*

Доказательство. Пусть c — произвольный кандидат. Рассмотрим профиль

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	$\ldots a \ldots b \ldots c \ldots$
$S\setminus\{d\}$ (S без d)	$\ldots b \ldots c \ldots a \ldots$

(d ставит a выше b, а b — выше c, все остальные ставят b выше c, а c выше a). Так как $\{d\}=f(a, b)$, то $a \overset{\bullet}{\succ} b$; в силу аксиомы единогласия имеем $b \overset{\bullet}{\succ} c$, а значит, по аксиома транзитивности, $a \overset{\bullet}{\succ} c$. В соответствии с аксиомой независимости наш результат не зависит от b, т. е. для всякого профиля вида

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	$\ldots a \ldots c \ldots$
$S\setminus\{d\}$	$\ldots c \ldots a \ldots$

имеем $a \overset{\bullet}{\succ} c$, значит, $\{d\}=f(a, c)$, где кандидат c уже произволен.

Аналогично для произвольного кандидата e, взяв профиль вида

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	$\ldots e \ldots a \ldots c \ldots$
$S\setminus\{d\}$ (S без d)	$\ldots c \ldots e \ldots a \ldots$

и повторив все рассуждения, получим, что $e \overset{\bullet}{\succ} c$. В конечном счете, $\{d\}=f(c, e)$ для произвольных e и c, т. е. является f-решающей.

Лемма 3. *Описанный выше избиратель d — диктатор.*

К этому моменту мы получили, что d может навязывать свое мнение по поводу любых двух кандидатов a и b при условии, что мнение остальных избирателей противоположно. В этом пока проявляется зависимость и от мнения других. Мы должны доказать, что, *как бы ни голосовали остальные избиратели*, коллективное мнение совпадает с мнением d.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим такие профили голосования, в которых у избирателя d порядок вида $\ldots \overset{d}{\succ} a \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} c \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} b \overset{d}{\succ} \ldots$, все остальные кандидаты ставят c выше a и b, а в остальном расположение их кандидатов произвольно.

Так как коалиция $\{d\}$ — f-решающая, то $a \overset{s}{\succ} c$; в силу аксиомы единогласия, $c \overset{s}{\succ} b$, значит, по аксиоме транзитивности, $a \overset{s}{\succ} b$. Исключая из соотношений c (в силу аксиомы независимости), получаем, что если d предпочитает кандидату b кандидата a, то ему и будет оказано коллективное предпочтение:

$$a \overset{d}{\succ} b \Rightarrow a \overset{s}{\succ} b$$

(независимо от расположения a и b у других избирателей!).

Меняя ролями a и b, получаем

$$a \overset{d}{\prec} b \Rightarrow a \overset{s}{\prec} b.$$

Итак, порядки $\overset{d}{\succ}$ и $\overset{s}{\succ}$ совпадают:

$$a \overset{d}{\succ} b \Leftrightarrow a \overset{s}{\succ} b.$$

Тем самым теорема Эрроу полностью доказана.

Некоторые житейские выводы из теоремы Эрроу

Что же мы получили в итоге? Выходит, введя четкие и разумные правила, обеспечивающие, на первый взгляд, выбор действительно того кандидата, которого предпочитает большинство, мы получили ...диктатуру. Четкая аксиоматика погубила демократию.

Итак, диктатура — понятие достаточно ясное, удовлетворяющее простым принципам, понятие же демократии невозможно сформулировать иначе, как «альтернатива диктатуре». Несмотря на это, демократия привлекает людей, являясь естественной политической средой для развития общества. Только в ней может происходить естественный отбор «сильнейших» и «мудрейших», ибо победа в выборах или в проведении своего решения зачастую требует, кроме умения убеждать, умения рассчитывать. Но в этом и ее бич. С помощью расчета слишком часто можно манипулировать результатами. Непротиворечивая же самодостаточная система диктатуры — мертва: ей развиваться некуда.

И еще один житейский вывод. Вы не задумывались, почему настолько популярна во многих демократических государствах именно двухпартийная система? Одну из причин этому мы упоминали: для двух кандидатур различные правила голосования дают один и тот же результат, и большинство противоречий тем самым снимается.

И наконец, комментарий...

В этой статье упоминаются три человека, о которых мы хотим сказать несколько слов.

Сведения о Жане Шарле Борда, которыми мы располагаем, таковы. Родился в 1733, умер в 1799 году. Следовательно, пережил Французскую революцию и видел восхождение Бонапарта. Был физиком и геодезистом, членом французской Академии. Участвовал в разработке метрической системы мер. В 1792 г. определил длину секундного маятника в Париже и нашел способ точного определения периода колебаний маятника. Занимался также гидравликой; доказал теорему, носящую теперь его имя, об ударе струн жидкости или газа. Оставил математические работы по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Политикой занимался во время революции; именно тогда возникла настоятельная необходимость разработать демократические процедуры, и Борда предложил свою систему голосования.

Гораздо более известен Жан Антуан Никола де Кондорсе (1745—1794), маркиз, энциклопедист, философ, математик, социолог, политик. Друг Даламбера и Вольтера. Разумеется, член французской Академии. В 1776 году был избран членом Петербургской академии наук, но в 1792 году исключен повелением Екатерины II, не одобрявшей (мягко говоря) его политических взглядов. Погиб Кондорсе трагически. Его миновала гильотина, скосившая столько его политических единомышленников-жирондистов, но, вынужденный скрываться от нее, Кондорсе не в добрый час встретился в лесу с волками.

Еще одно имя, встретившееся вам,— Кеннет Эрроу. Он — наш современник, известный американский экономист, нобелевский лауреат 1972 года по экономике. Работает в области эконометрии, теории общего экономического равновесия, экономической теории благосостояния, теории управления.

АПОЛОГИЯ ФИЗИКИ

Доктор физико-математических наук
М. КАГАНОВ

Нужно ли физику защищать? От кого? Эти вопросы, наверное, сразу возникают при взгляде на название статьи. Стала общим местом защита физиков от обвинения в открытии способа массового уничтожения. Не об этом пойдет здесь речь. Физика, будучи источником идей и технологий, используемых в инженерной практике, воспринимается многими как приземленная наука, техническая дисциплина, якобы бездуховная по самой своей сути. Вот от этой точки зрения хочет защитить физику автор.

Трудно дать всех устраивающее определение духовности. Но мне кажется несомненным, что в него входит интерес человека к окружающему его миру не только как к удобной или неудобной среде обитания. Трудно назвать духовным человека, не замечающего красоты пейзажа, безразличного к восходам и закатам, не интересующегося миром животных и растений, не испытывающего почтительного удивления перед фантастическим «устройством» любого уголка живой природы. Удивление, испытываемое человеком при взгляде на окружающую природу, естественно превращается в любопытство, а развитое обучением и чтением — в любознательность. Конечно, у разных людей любознательность останавливается на разном уровне познания. Выясняется: для того чтобы ответить на «детские» вопросы «почему?» и «как?», необходимо создать глубокие теории, провести огромное число тонких экспериментов. Постепенно, переходя от простого наблюдения к фиксации строгих результатов экспериментов, а в дальнейшем все глубже проникая в суть вещей, человек постигает структуру Мира, начинает понимать движущие силы природных явлений.

В углублении процесса познания таится опасность. Любование солнечным закатом, его воспроизведение на холсте воспринимается как духовная деятельность*), а выяснение спектрального состава солнечного света, исследование механизмов излучения световых квантов многим кажется скучным, узко профессиональным занятием, требующим знания конкретных методов — правил работы с формулами или с приборами. Конечно, к исследованию явлений окружающего нас Мира необходимо подходить профессионально — знать правила работы с формулами и приборами. Дилетанство и верхоглядство особенно нетерпимы в тех науках, которые имеют сложный аппарат и инструментарий. Есть, однако, своеобразное диалектическое противоречие между простотой наиболее глубоких вопросов, которые ставит перед нами Природа, и способов ответа на них. Иногда человек, занятый (профессионально!) исследованием определенного круга явлений, не видит связи этих явлений с устройством Мира, не ощущает, что его работа вносит дополнительный мазок в Картину мира. Даже в этом (по сути огорчительном) случае я бы не обвинил этого человека в бездуховности. Вполне могу себе представить, что он (этот гипотетический «приземленный» исследователь) бездну эмоций — а не мыслей — потратил на разработку методов вычисления или измерения.

На памяти моего поколения физиков катастрофа, происшедшая с

*) Конечно, только в том случае, если в пейзаж привнесено человеческое отношение к тому, что видит художник.

Л. Д. Ландау*). После автомобильной аварии спасенный врачами и физиками Лев Давидович не вернулся к научной деятельности. Прожил Л. Д. после катастрофы шесть лет, разговаривавшие с ним многократно убеждались, что у него сохранилась память, что он способен на тонкие оценки чужой деятельности, но работать как физик-теоретик он не мог. Врачи утверждали, что это — последствие травматического отключения той области мозга, которая ответственна за эмоциональную сферу...

Еще один пример, на первый взгляд далекий от предыдущего. Однажды на Ученом совете Института физических проблем (теперь институт носит имя Петра Леонидовича Капицы; тогда П. Л. был жив и вел Совет, о котором идет речь) выступил Яков Борисович Зельдович**) и высказал (не помню, по какому поводу) общие мысли о природе творчества. Основная мысль сводилась к тому, что любознательность — одна из потребностей человека. Наука — способ удовлетворения этой потребности. И ее необходимо удовлетворять как потребность в пище, одежде и т. п. Речь, кажется, шла о финансировании фундаментальной науки. Поэтому Я. Б. подчеркивал не практическую ценность результатов научной деятельности, а именно удовлетворение потребности человека (человечества) в знании. Мне выступление очень понравилось (поэтому и запомнил). Как всякое интересное выступление, его активно обсуждали не только на Совете, но и после. Сильное впечатление на меня произвели слова молодого талантливого физика-теоретика. Он не то что не соглашался с Я. Б. Но признавался: когда он занят вычислениями, то любознательность, желание получить ответ на вопрос, который привел к постановке задачи, не играет большой роли, волнует (хочется сказать, вдохновляет — так я его понял) сам процесс вычисления, радость от удивительной гармонии, которая ощущается в процессе использования строгих математических правил. И, может быть, лишь подсознательное ощущение того, что вычисление имеет отношение к реалиям природы. Должен признаться, что слова этого молодого физика соответствуют и моему отношению к рутинному (казалось бы) процессу получения ответа...

Хочется, чтобы читатель-неспециалист имел в виду эту сторону работы физика и, думаю, любого научного работника. Есть затасканное, но точно отражающее суть дела, слово — творчество. Научная работа — творчество. Творчество в любом виде человеческой деятельности вызывает вдохновение. И это превращает деятельность научных работников в духовную...

И все же. Есть процесс — творчество и есть результат. Тут, казалось бы, духовность не при чем. Получив результат (измерив или вычислив что-то), мы узнали то, что объективно существует. И, как уверено большинство научных работников, существует вне и независимо от нашего сознания. Имеет ли сам результат научной деятельности какое-либо отношение к духовности? Я уверен, что да. И попробую обосновать свою уверенность. Для этого нужно постараться понять процесс постижения устройства Мира. Далеким от физики людям может показаться, что он напоминает разгадывание головоломки. Знаете, есть такие головоломки: дается шарик или кубик, состоящие из отдельных неправильной формы кусочков. Надо уметь шарик (или кубик) разобрать и собрать из этих кусочков. При попытках

*) Я думаю, нет необходимости представлять читателям академика, лауреата Нобелевской и Ленинской премий Л. Д. Ландау (1908—1968). Л. Д.— один из крупнейших физиков-теоретиков XX века, снискавший себе славу не только своими результатами, но и замечательной многотомной монографией «Курс теоретической физики», по которой учились и учатся многие поколения физиков-теоретиков, а также созданием одной из наиболее знаменитых и активных школ физиков-теоретиков.

**) Я. Б. Зельдович (1914—1987) — талантливый и необычайно продуктивный физик-теоретик. Ему принадлежат выдающиеся достижения в физике горения, в физике элементарных частиц, астрофизике и космологии. Вместе с А. Д. Сахаровым и Ю. Б. Харитоном принимал участие в создании советского атомного оружия. Академик. Трижды Герой Социалистического Труда.

разгадки головоломки очень важно то, что знаешь — решение есть. Еще: разобрав головоломку на части, уверен, что части неделимы. И наконец, всегда известны правила сборки. Они как законы природы, если сравнить разгадывание головоломок с процессом познания. Так вот о правилах сборки: априори известно, что они есть, общие для всех головоломок: нельзя гнуть, прилагать силу и т. п. И вполне конкретные — для каждой головоломки свои: порядок разборки и сборки.

А теперь вернемся к Миру. Пожалуй, давно физики убедились, что все из чего-то состоит. Но из чего? Существует ли предел разложимости? Когда я учился в университете, все были уверены (и нас этому учили), что все построено из электронов, протонов и нейтронов, а для этих «кирпичей» мироздания создали специальный термин — элементарные частицы. Потом «элементарные» частицы посыпались, как из рога изобилия. Что ни год, то новая частица. Их классифицировали, распределяли по семействам, устанавливали разнообразные соотношения и... поняли, что все «элементарные» частицы недостаточно элементарны. «Появились» — теперь уже только в работах физиков-теоретиков — новые претенденты на роль «кирпичей» мироздания — кварки, удивительное создание человеческого ума, частицы с зарядом $^1/_3$ и $^2/_3$ от электронного заряда, частицы, которых никто не видел вне бывших элементарных частиц, но в реальности существования которых, пожалуй, никто не сомневается...

В контексте того, о чем я пишу, для меня важно следующее: кварки — порождение человеческого ума, необходимые для построения стройной, непротиворечивой и красивой картины Мира*).

Остановимся на пути углубления внутрь мельчайших частиц вещества и задумаемся над тем, как из них строится весь окружающий нас Мир и мы сами, конечно.

Одно небезынтересное наблюдение. Углубление в структуру «элементарных» частиц не заставило нас пересмотреть свои взгляды на строение кристаллов, не изменило наших представлений о природе магнетизма или сверхпроводимости. В физике существует своеобразная иерархичность. Пытаясь понять свойства макроскопических объектов, нет необходимости добираться «до самой сути». Следует вовремя остановиться. Например, выясняя природу электропроводности и теплопроводности металлов, не следует задумываться о строении ядер тех атомов, из которых металл построен. Иерархичность, конечно, очень помогает и, в частности, обеспечивает консервативность (сохранность) добытых наукой результатов. Действительно, если бы не иерархичность, то любое продвижение вперед требовало бы коренной перестройки всего здания физики. По сути это означало бы невозможность движения вперед в познании свойств Природы**).

Итак, вернемся к построению Мира (тел нашего Мира) из мельчайших частиц вещества. Ну, это уж точно конструктор! Огромный, сложный, но все же конструктор.— Такое мнение часто приходится слышать. К сожалению, не только от людей, далеких от физики, но и от физиков. Особенно часто, если эти физики

*) Боюсь, в этих заметках не удастся сколько-нибудь подробно обсудить важную для нашего рассказа тему: «Эстетика и наука». Хочется только отметить два обстоятельства. Первое. В оценках научной красоты ученые более едины, чем в оценке бытовой красоты. И второе. По какой-то таинственной причине красивый результат редко бывает неправильным. Если бы я был верующим, то подумал бы, что эстетические критерии у Господа Бога и у ученых совпадают. Или даже так: Господь снабдил ученых эстетическими критериями, чтобы им легче было ориентироваться среди научных результатов. Наверное, чтобы последнюю фразу произнести искренне, надо быть глубоко верующим человеком.

**) Не стоит ли об этом задуматься творцам перестройки нашего общества? Как было бы хорошо, если бы в результате перестройки возникло общество, жизнедеятельность структур которого не зависит или хотя бы мало зависит от новаций, происходящих в политических, идеологических и других сферах. Даже помечтать об этом и то приятно!

занимаются физикой элементарных частиц. И все же с этим суждением я в корне не согласен.

Не согласен потому, что для достижения понимания строения и устройства Мира вещей и тел нельзя сформулировать правила, пригодные для всех случаев жизни. Процесс построения, конечно, творческий процесс. Мы уже говорили об этом. Но дело не только в том, что приходится, преодолевая трудности, использовать все свои интеллектуальные способности. Главным образом дело в том, что приходится создавать, творить те сущности, из которых, собственно говоря, и строится Мир со всем богатством его свойств... Боюсь, читатель подумает, что ему морочат голову. «Ведь речь идет о строении Мира из электронов, протонов и нейтронов?» — спросит он. Зачем же создавать еще какие-то «сущности»? Затем, что иначе ничего нельзя понять. Самый простой пример. Исследуя свойства твердых тел, мы обнаруживаем, что твердые тела очень похожи на... газы. «Ерунда какая-то»,— скажет даже несколько обиженно читатель. «Ведь газ — совокупность почти невзаимодействующих частиц, а твердое тело состоит из сильно взаимодействующих частиц. Чтобы разделить твердое тело на части, надо потратить немало энергии... А вы говорите твердое тело похоже на газ *частиц*»... «Но я и не говорил на газ частиц»,— возразит автор. И действительно, твердое тело ведет себя как газ не частиц, а *квазичастиц**) — фононов, специально введенных сущностей, позволяющих понять свойства макроскопических тел. Конечно, можно долго спорить, *есть* ли фононы или они *введены*. Конечно, они *есть*, но не как структурные единицы вещества. Не из них *состоит* твердое тело, а из атомов или молекул, а бывает, из ионов разного знака. Но чтобы понять, как движутся атомные частицы, пришлось *ввести фононы*, т. е. выяснить (увидеть, почувствовать, угадать), что движутся атомные частицы так, будто тело состоит не из атомов (молекул, ионов), а — повторим — из квазичастиц — фононов. А введя фононы, получить бесконечное число следствий, подтверждающих факт существования фононов. Твердое тело проводит тепло так, как проводит тепло газ фононов. И поглощает звук так, как поглощает газ фононов. И так далее и тому подобное...

Здесь не место перечислениям и подробным описаниям. Хочется подчеркнуть: фононы — творение ума, они «созданы» для понимания, они — результат духовной деятельности человека, его творчества. Конечно, можно сказать и иначе: физики увидели и расшифровали, как движутся атомные частицы в твердом теле. Но что уж заведомо духовная деятельность, это создание новых слов, а значит, и новых понятий.

Для описания движения атомных частиц пришлось придумать новые слова: квазичастицы, фононы, магноны...— слова, которых не было в доквантовой физике твердого тела.

Объективность существования материи часто «доказывают» фактом существования Природы — в ее очень похожей на сегодняшнюю форме — до появления на Земле человека. Мне, должен признаться, подобное утверждение кажется убедительным. Или, точнее, не столько логически убедительным, сколько соответствующим моему восприятию Природы эволюционирующей и в результате эволюции сотворившей думающее существо — человека, способного постичь (постигать) устройство Природы.

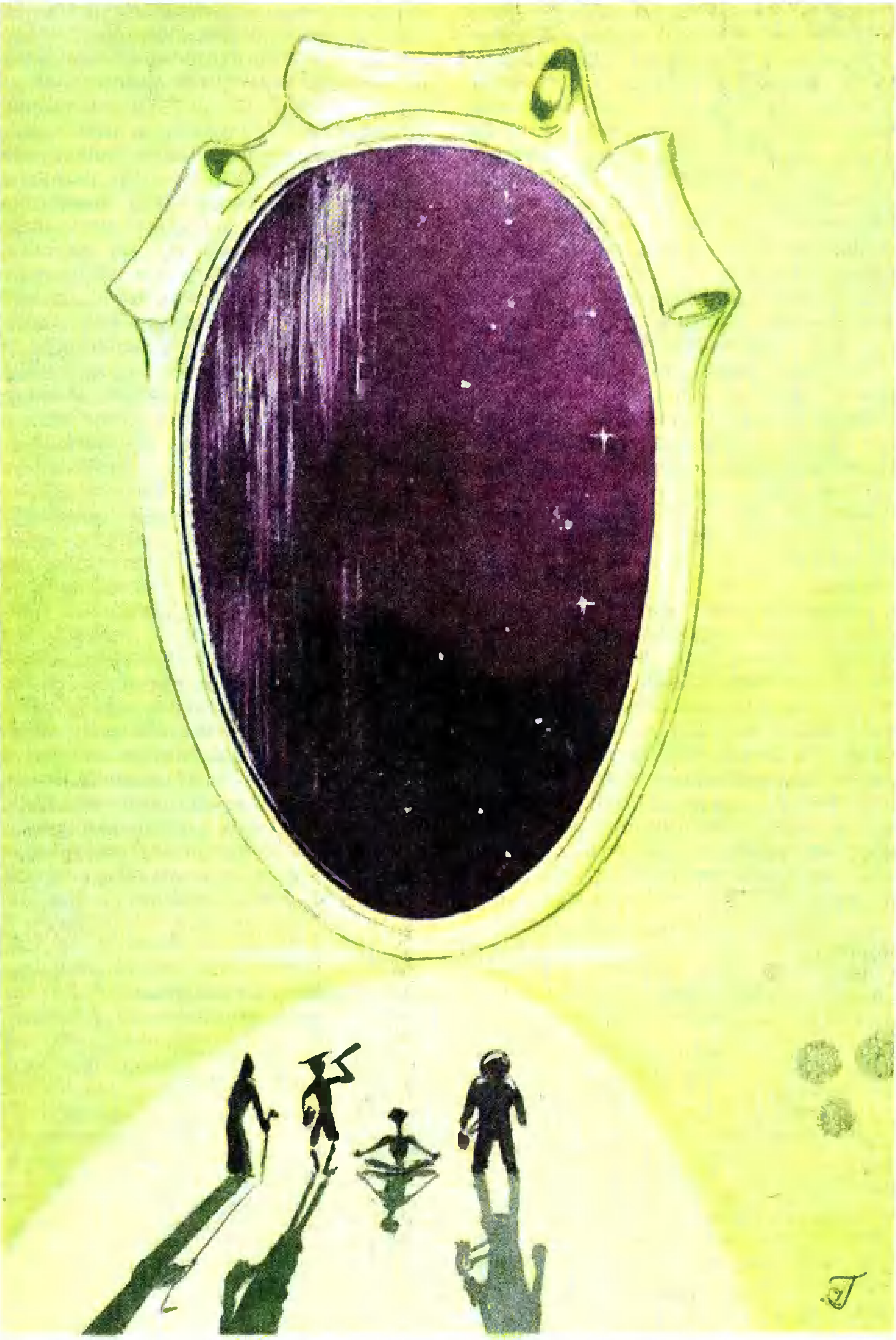
Процесс постижения оказался необычайно трудным, необычайно продуктивным и (это — главное, что я хочу сказать) необычайно тесно связанным с самим процессом мысли. В Природе, в свойствах материи человек открывает то, что (казалось бы!) есть только продукт, результат деятельности человеческого мозга, преж-

*) Квази... (от лат. quasi — как будто, якобы) — приставка, соответствующая по значению словам «мнимый», «не настоящий», напр.: квазинаучный, квазиученый. (Словарь иностранных слов. М.: Русский язык, 1980.) В физике слово «квазичастица» не несет на себе уничижительного смысла.

де всего, логику. Математика есть материализованная логика. Почему Природа подчиняется математическим законам? Почему она описывается доступными человеческому уму законами?.. Опять хочется (в поисках уютного ответа) обратиться к религиозному мировоззрению и, как бы обратив всю постановку вопроса, сказать: «Природа создана такой, чтобы быть постижимой человеческим умом...»

Я не знаю ответов на эти вопросы. И, наверное, не умею слишком строго их формулировать. Я не философ. В разное время, в разные периоды жизни к этим вопросам у меня есть и было разное отношение. Не всегда они меня волновали. Занятый решением конкретных задач, я просто не замечал, что подобные вопросы существуют. Встретившись с ними в статьях классиков (Эйнштейна, Бора, Шредингера, позднее Гейзенберга), я относился к ним с почтением, не допускающим «вмешательства». Но постепенно, не переставая заниматься вполне конкретной, вычислительной деятельностью физика-теоретика, обнаружил, что меня волнуют общие проблемы, что интересны не только вполне определенные результаты теории или эксперимента, но и то, какое место занимают эти результаты в том, что принято называть научной картиной Мира. И, более того, возникла потребность обдумать, в каком соотношении с Миром находится научная картина Мира. Не пытаясь переквалифицироваться в профессионального философа, я написал несколько статей и одну небольшую брошюру. Но ни разу я не высказался столь определенно, как здесь; не высказал своей уверенности, что Наука — одна из сторон духовной жизни человечества. Что невозможно ее свести к полезной для развития производительных сил деятельности человека. И даже к удовлетворению любознательности как жизненно важной потребности людей. Что нет ни одного сколько-нибудь важного научного результата, в который не была бы вложена частица души человеческой. И хочу повторить еще раз. Частица души вложена не только в процесс добывания истины, но и в саму истину. Наука есть в каком-то смысле результат очеловечения Природы. Слова, понятия, соотношения — это то, чем наделил Природу человек. Если художник показал людям внешнюю красоту Мира, то ученый вскрыл существование внутренней интеллектуальной красоты, прежде всего проявляющейся в познаваемости законов Природы, в удивительном многообразии проявлений сравнительно просто формулируемых основных законов, управляющих движением материи.

Захотелось мне поделиться этими мыслями с молодыми людьми, так как заметил утрату романтического отношения к Науке и, особенно, к физике.



СВЕРХЗАДАЧА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

Люди, которые... вышли из бесконечной вселенной и появились в данное время и в данном месте в качестве членов нашего общества,— все братья и сестры, имеющие одно и то же начало — Бесконечность и одних и тех же родителей — Природу. С этими братьями и сестрами мы разделим и нашу будущую судьбу, поскольку все мы вернемся к Природе и бесконечной вселенной — нашим родителям и нашему началу.

Микио Куши. Макробиотика

...небесные миры — это будущие обители отцов, ибо небесные пространства могут быть доступны только для воскрешенных и воскрешающих; исследование небесных пространств есть приготовление этих обителей.

Н. Ф. Федоров. Философия общего дела

Итак, еще и сверхзадача? Мало задач, придуманных для беззащитных школьников? Например, вот таких...

Представим себе, что в безграничных просторах Вселенной космонавт-строитель проглотил гайку и его нужно как можно быстрее доставить с космического корабля на космическую базу, летящую параллельно с той же скоростью на расстоянии 100 км. А максимальная перегрузка, которую может такой космонавт выдержать, равна четырем ускорениям земного тяготения. У завхоза этого корабля возникает естественный для него вопрос: каким минимальным количеством топлива нужно заправить ракету, чтобы пострадавший поскорее оказался в руках врачей? Скорость истечения газов из сопла двигателя ракеты постоянна и равна 2 км/с.

И тут в голове завхоза пронеслись привычные мысли. Пусть в некоторый момент времени ракета имеет скорость v и массу m. Разобьем ракету условно на две части (рис. 1): ту, которая через малый промежуток времени Δt «собирается» отлететь назад (отработанное топливо),— обозначим ее массу через ΔM — и тот «остаток» массы $m-\Delta M$, который вместе с космонавтом полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v+\Delta v$. Скорость отлетевшей части относительно остатка обозначим через u_0, тогда ее скорость относительно места старта будет равна $(v+\Delta v)-u_0$. Так как разделение этих двух частей произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты (в системе координат, жестко связанной с кораблем и базой, по-прежнему летящими параллельно с постоянной скоростью) не изменился:

$$(m-\Delta M)(v+\Delta v)+\Delta M(v+\Delta v-u_0)=mv.$$

После алгебраических преобразований (завхоз научился их делать в уме еще на Земле) этот закон сохранения импульса примет вид

$$m\Delta v=u_0\Delta M. \qquad (1)$$

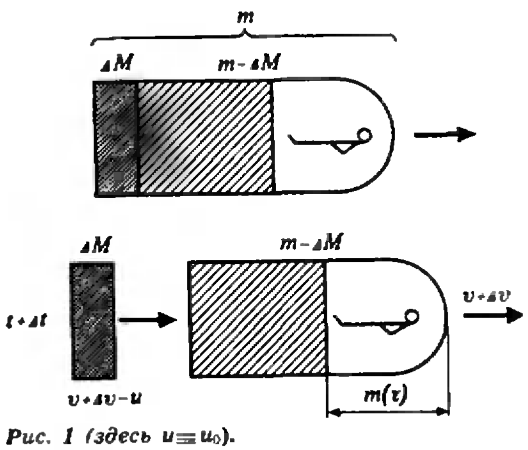


Рис. 1 (здесь $u\equiv u_0$).

Учитывая, что отброшенная масса ΔM в точности равна убыли массы ракеты $\Delta M = -\Delta m$, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\Delta v}{u_0} = -\frac{\Delta m}{m}. \qquad (2)$$

Позвольте,— скажет читатель, — что же, этот мыслящий завхоз плохо учился в школе? Ведь из (2) после элементарного интегрирования следует известная формула Циолковского

$$\frac{v}{u_0} = \ln\frac{m_0}{m} \qquad (3)$$

(в которой учтено, что в начальный момент времени $t=0$ масса ракеты равна m_0).

Несомненно, формулу (3) он знает — иначе не сдал бы экзамен на космического завхоза. Но ведь ему ясно сказано: доставить как можно быстрее, но так, чтобы ускорение не превысило $4g$; значит, надо все время выдерживать ускорение постоянным, $a = a_{max} = 4g$. Подставив в уравнение (3) закон изменения скорости $v = 4gt$, завхоз получил закон изменения со временем массы корабля:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{4g}{u_0}t}. \qquad (4)$$

Напомним, что традиционно рассматривается условие постоянного секундного расхода массы $\mu = \text{const}$ (кг/с), так что $m(t) = m_0 - \mu t$. Но это приводит к непрерывно растущему ускорению, что может нарушить требование нашей задачи. В данном случае расход массы должен убывать по закону

$$\mu = -m'(t) = \frac{4gm_0}{u_0}e^{-\frac{4g}{u_0}t},$$

который надо задать бортовому компьютеру ракеты. Так что не зря все эти мысли пронеслись в голове космического завхоза. Теперь осталось додумать совсем немного. Ведь причалить к базе ракета должна тоже с нулевой скоростью — иначе любая малая, но конечная, скорость при ударе даст бесконечно большое ускорение, что запрещено. А движение происхо-

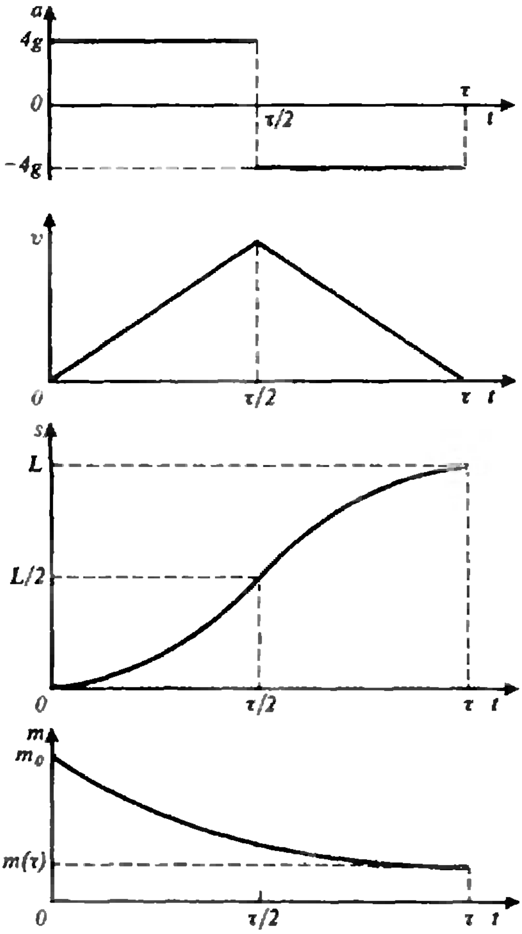


Рис. 2.

дит с постоянным по модулю ускорением, т. е. равнопеременно. Значит, можно представить расписание движения ракеты в виде графиков зависимости от времени (рис. 2). Там показано, что в середине пути, в момент времени $t = \tau/2$ (τ — полное время полета), нужно изменить знак силы тяги ракеты (реверс тяги). Осталось рассчитать. Из хорошо известных законов равноускоренного движения получим

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = \frac{g\tau^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}},$$

и конечная масса ракеты —

$$\frac{m(\tau)}{m_0}=e^{-\frac{4g}{u_0}\sqrt{\frac{L}{g}}}=e^{-\frac{4\cdot 10}{2\cdot 10^3}\sqrt{\frac{10^5}{10}}}=e^{-2}.$$

Таким образом, начальная доля топлива, которым нужно заправить ракету, равна $\frac{m_0-m(\tau)}{m_0}=\frac{e^2-1}{e^2}$ (предполагается, что в момент причаливания к базе все топливо израсходовано до последнего грамма).

А вот другая задача: космонавт от неожиданности проглотил вовсе не гайку, а бутерброд (что невредно), с удивлением обнаружив нежеланный корабль, приближающийся с постоянной скоростью $v_0=2$ км/с. При каком расстоянии между ними он должен запустить ракету, чтобы «пробойная сила» была максимальна (будем понимать под этим набором слов максимальную кинетическую энергию). Известно еще, что приборы самонаведения ракеты выдерживают ускорение не более $100\,g$, а скорость истечения газов та же, что и в предыдущей задаче: $u_0=2$ км/с.

Тут уж точно ясно, что ракете нужно лететь с максимально возможным ускорением $a=a_{max}=100\ g$, причем незачем переключать силу тяги на противоположную, так что относительная скорость ракеты и цели изменяется со временем по закону $v=v_0+at$, а расстояние — $s=s_0-v_0t-\frac{at^2}{2}$ (рис. 3, на котором изображены «мировые линии» $s(t)$ нежеланного корабля и нашей ракеты).

Кинетическая энергия при этом изменяется согласно выражению (здесь использована формула (4))

$$K=\frac{mv^2}{2}=\frac{m_0}{2}e^{-\frac{at}{u_0}}(v_0+at)^2.$$

Видно, что это произведение падающей экспоненты на растущую параболу может обладать максимумом. Этот максимум можно найти, нарисовав зависимость кинетической энергии от времени (рис. 3), а можно взять производную (кто умеет, да сделает) и приравнять ее нулю: $dK/dt=0$, откуда

$$-\frac{(v_0+at)^2}{u_0}+2(v_0+at)=0.$$

Тут два корня. Один получается при $v_0+at=0$, $t_1=-\frac{v_0}{a}<0$ (т. к. корабли сближаются и $v_0>0$, что учтено выше) и, относясь к прошлому времени, не представляет интереса. Второй корень равен $t_2=\tau=\frac{2u_0-v_0}{a}$ и при условиях нашей задачи дает $\tau=\frac{2\cdot 2-2}{10^3}10^3=2$ с (а мог бы быть и отрицательным, если $v_0>2u_0$, т. е. если корабли сближаются так быстро, что ракета просто не успеет развить скорость, достаточную для достижения максимального значения кинетической энергии $K_{max}=2m_0u_0^2e^{v_0/u_0}/e^2$). Наконец, получим искомое расстояние s_0, подставив τ в выражение для $s(t)$:

$$s(\tau)=0\Rightarrow s_0=\frac{4u_0^2-v_0^2}{2a}=6\text{ км}.$$

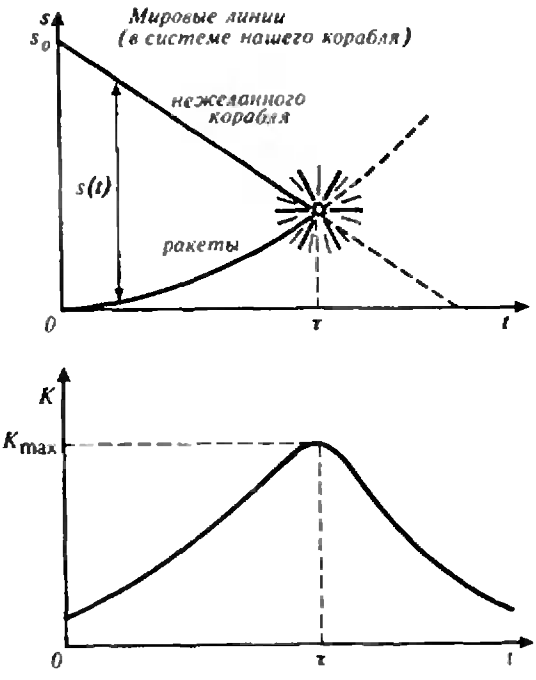


Рис. 3.

Итак, мы придумали и решили еще две задачи — и обе вокруг формулы (3), но сколь различны они по целевой установке: в одной нужно помочь, в другой — навредить, и все побыстрее! Себе — помочь, другому — навредить. Этакое всевременно́е и всемирно-историческое топтание Человечества вокруг научных достижений ради тривиальной цели. «Приверженные к старым навыкам, мы по-прежнему видим в науке лишь новый способ более легко получать те же самые старые вещи — землю и хлеб. Мы запрягаем Пегаса в плуг.» (Тейяр де Шарден. Феномен человека. М.: Наука, 1987, с. 219). Тут, конечно, Пегас — поэзия, плуг — проза.

Но что́ же думал сам первооткрыватель знаменитой формулы (3)? Действительно, зачем провинциальный школьный учитель так рвался и звал в космос от зеленых лесов и лужаек, пренебрегая бытом и тратя бо́льшую часть заработка на эксперименты, на частные издания своих трудов, почти всеми тогда отвергаемых? Тут нельзя все списать на маниакальное стремление к славе земной — у него все слишком верно, результативно, плодотворно, следовательно, на психическое расстройство не похоже. Тут что-то более глубокое.

В своих дневниках он сетовал, что во мнении людей выглядит «каким-то однобоким техником, а не мыслителем»... «Ракета для меня — только способ, только метод проникновения в космос.» Зачем же?

И постепенно возникает подозрение, что любой великий мыслитель, может быть, ставит перед собою некоторую Сверхзадачу, далеко превосходящую обыденные понятия, и обнаружение таковой — важнейший элемент в истории науки и полезнейший — в педагогике.

В истории русской космонавтики выстраивается определенная цепочка ярких личностей и событий (может быть, только часть, только обрывок цепочки, но звенья этого кусочка логично сцеплены). Начнем с Н. Ф. Федорова (1828—1903), внебрачного сына князя Гагарина, библиотекаря Румянцевского музея, скромного, незаметного философа в «старом, потертом, но опрятном платье», который при жизни почти не публиковал своих размышлений. А размышлял он ни много ни мало как о физическом, телесном бессмертии, причем не только тех будущих поколений, при жизни которых наука достигнет нужного уровня (это было бы понятно, но эгоистично с их стороны), но и всех прошлых, короче — о воскрешении отцов. В этом он видел главную цель науки, требовал даже университеты строить на кладбищах, чтобы юноши размышляли не о чепухе, а о победе над смертью. По современной терминологии, согласно которой отрасли науки делятся на фундаментальные и прикладные, он был, можно сказать, сторонником практического, прикладного Христианства.

А с какими мыслями он побывал на Памире? Не потому ли, что там и небо ближе, Солнце и Луна совсем белые, а звезды цветные и не мигающие...

«...Земля, тьмы поколений поглотившая, небесною сыновьнею любовью и знанием движимая и управляемая, станет возвращать ею поглощенных и населять ими небесные, ныне бездушные... звездные миры... Этот день будет дивный, чудный, но не чудесный, *ибо воскрешение будет делом не чуда, а знания и общего труда*» (Н. Ф. Федоров. Философия общего дела. М.: Мысль, 1982, с. 528, 529).

Следующее звено. В течение трех лет (1873—1876) этот русский философ руководил самообразованием К. Э. Циолковского. Идеи Федорова были восприняты его способным учеником как стимул к посильному деянию, но не по воскрешению отцов (этого никто тогда не мог, как, впрочем, и сейчас), а к подготовке уже следующего этапа — куда девать воскрешенные поколения отцов плюс все прибывающие поколения сыновей. Конечно же, вверх, к невесомости, в море света, океан энергии — в космос!

Скорее всего, именно об этом и размышлял будущий «отец русской космонавтики», глядя на звезды, выводя знаменитую формулу (3) и пытаясь мысленно проникнуть в тонкости космического быта *там* — так что при чтении его работ, созданных на основе законов физики, открытых на Земле, возникает ощущение, что он пришел уже *оттуда*, что он сам все это уже прочувствовал.

Конечно, это настойчивое требование философии Н. Ф. Федорова победы науки над смертью (не только грядущей, но и *свершившейся*) относится к классу идей, величие или нелепость которых трудно оценить современникам (по его признанию, точная дата возникновения этой основной идеи — 1851 год). И сейчас материалистически-атеистическое мышление подсказывает, что, скорее всего, это утопия. Но в год тридцатипятилетия первого искусственного спутника Земли (1957) разумно вспомнить о «духовной пружине», стимулировавшей творчество великих теоретиков Космоса.

Следующий этап — связь Циолковского с С. П. Королевым — важнейшее практическое звено в этой цепочке. Тут уже почти все на нашей памяти, так что и говорить долго не надо. Результат — первый искусственный спутник Земли. И вскоре вслед за этим Гагарин (1961): «Ну, поехали!» (Не случайно и совпадение отцовской фамилии философа и первого космонавта?)

Но, может быть, Н. Ф. Федоров и не первый, кто теоретически занимался практическим Христианством. Ведь есть и нетленные мощи святых и, возможно, еще многое, чего не знает автор этих строк. Но случайно ли обрывок цепочки, тянущейся в Вечность, причем с практической доминантой, возник именно на русской земле?

«Русский народ, подобно народу еврейскому, — народ мессианский. В лучшей своей части он ищет Царства Божьего, ищет правды и уповает, что не только день Божьего Суда, но и день торжествующей Божьей правды наступит после катастроф, испытаний и страданий» (Н. А. Бердяев. Самопознание. М.: Книга, 1991, с. 165).

Итак, вместо космонавтики государственной, военно-оборонительной — Космонавтика всемирная, общечеловеческая?...

Пятая международная, космическая...

В Москве в августе этого года прошла очередная международная конференция юных исследователей космоса. Конференция проводилась в рамках программы Международного года космоса, объявленного ООН.

Среди участников — ребята из США и Японии, Великобритании и Южной Кореи, Болгарии и стран СНГ. На конференцию приехал и «патриарх» движения — президент Международного совета юных астронавтов Джек Андерсон.

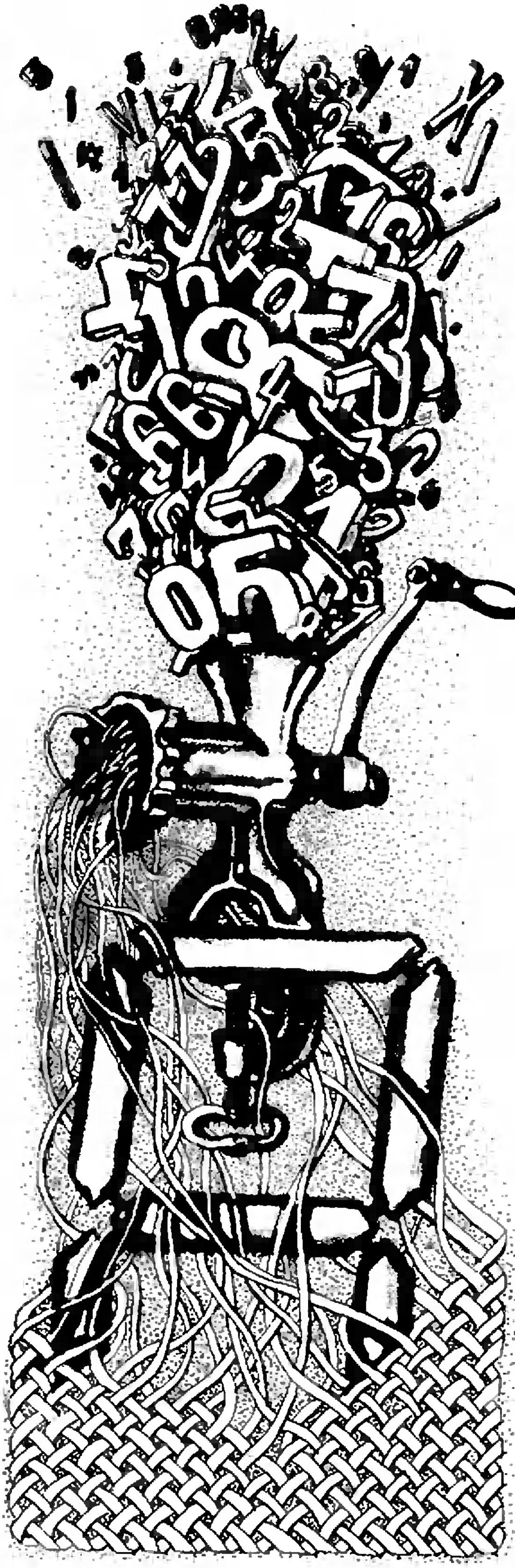
Конференция — не традиционный конкурс научно-технического творчества молодежи и не семинар по обмену опытом. Это яркий праздник, своеобразный космический фестиваль. И не случайно ее участников приветствовал Президент России Б. Ельцин.

За время работы конференции ребята побывали на многих космических объектах. А вечером начинали свою работу мастерские. Можно было собрать летающую модель ракеты, нарисовать фантастический пейзаж, сшить загадочного инопланетянина и даже приготовить космический обед! Что ж, не «железом» единым жива космонавтика...

В эти удивительные дни летало не только все, что обычно летает, но и то, что летать не должно вовсе, в том числе и садово-огородный инвентарь.

Ребята многому научились, но, может, самое главное — и они, и взрослые научились не принимать все всерьез. Хотя... учитывая, что в США, скажем, аэрокосмическое образование курирует сам президент страны — занятие это не такое уж несерьезное.

Д. Пайсон



Если сравнить школьные программы, по которым учитесь вы, с программами, например, Великобритании или США, то первое, что бросается в глаза — наличие в их программах курсов теории вероятностей и статистики. Введение этих курсов явилось требованием практики, жизненной потребностью, поскольку экономическая грамотность невозможна без знания основ статистики. Мы уверены, что через несколько лет в программах средних школ у нас будет как курс начальной экономики, так и курс статистики. А сейчас мы хотим предложить вам отрывок из книги Питера Спрента «Как обращаться с цифрами или статистика в действии», вышедшей в Англии в 1977 году и переведенной на русский язык белорусским издательством «Вышэйшая школа» в 1983 году.

ЗАЧЕМ НУЖНА СТАТИСТИКА?

П. СПРЕНТ

Начало

В январе 1976 года торговый дефицит Великобритании составил 275 миллионов фунтов стерлингов. В день Святого Патрика того же года 1 фунт стерлингов стоил 2,42 американского доллара. А через несколько дней экспериментатор нашел, что привес шести поросят за неделю меняется от 1218 до 1314 граммов. Эти цифры, или статистические данные, для кого-то могут представить интерес и уж точно имеют определенный смысл.

Против моего окна висит надпись, гласящая: «Не рискуйте! Пользуйтесь пешеходным переходом, он впятеро безопаснее!» Конечно, эта надпись содержит некоторую информацию: она сообщает, что для перехода улицы разумнее пользоваться пешеходным переходом. В это можно поверить, но что означают слова «впятеро безопаснее»? Вряд ли это значит, что моя безопасность возросла бы в пять раз, если бы я весь день прогуливался взад и вперед по переходу, а не писал книгу. Скорее уж это означает, что в каком-то смысле гораздо безопаснее пользоваться переходом, чем пересекать улицу в другом месте, но даже это утверждение нуждается в оговорках. Пешеходные переходы обычно расположены в оживленных местах. Если можно пересечь дорогу там, где движение транспорта невелико, то кажется невероятным, что более безопасно пройти несколько сот метров до оживленного перекрестка только затем, чтобы воспользоваться переходом. Однако пользоваться удобным переходом безопаснее, чем пробираться через интенсивный поток машин. Откуда все-таки взялось это «впятеро»? Разве сравнивал кто-нибудь число несчастных случаев с людьми, которые переходят улицу, скажем, за 200 метров до него? Об этом, пожалуй, нам ничего не известно, но об этом и беспокоиться не нужно, поскольку надпись висит как раз над переходом. Так что «впятеро» в конечном счете означает не очень-то много.

Когда же данные несут в себе бо́льшую нагрузку, мы не можем столь вольно обращаться с их численным значением. Неутешительные цифры ежемесячного торгового баланса (вроде январских 1975 года) могут привести к многомиллионному падению цен на акции, тогда как резкое повышение индекса стоимости жизни может вызвать требования увеличения заработной платы с далеко идущими экономическими последствиями. Вопрос состоит в том, как извлечь максимально возможную информацию, которая содержится в числовых данных.

В обыденной жизни слово «статистика» имеет два значения. Во-первых, оно обозначает сами числа или данные; во-вторых — науку или искусство извлечения полезной информации из наборов чисел.

Мы слово «статистика» будем употреблять в обоих смыслах, но чаще во втором. Наша цель — выяснить, как нужно обращаться с данными, чтобы получить выводы с широкой областью применения.

Мы уже упоминали о еженедельном привесе поросят, изменяющемся от 1218 до 1314 граммов. Эти данные отражают общее явление: даже если поросята попадают к нам одинаковыми и содержатся в одинаковых условиях, все они не будут иметь одинаковый недельный привес. Более того, мы можем быть совершенно уверенными в том, что другая группа поросят за ту же неделю или эта же группа за другую неделю будет иметь другой привес. Проблема заключается в том, чтобы отделить такие естественные, неконтролируемые различия между особями (в данном случае — поросятами) от различий, которые возникают из-за управляемых изменений внешних условий. Например, мы можем содержать одну группу из шести поросят на одном рационе, а другую группу из шести поросят — на другом при прочих равных условиях. Хотелось бы выяснить, влияет ли рацион на привес поросят. Если недельный привес при одном рационе колеблется от 1218 до 1314 граммов, а при другом — от 893 до 947 граммов, то ясно, какой рацион лучше. Но если привес при втором рационе составляет от 1198 до 1283 граммов, то для выяснения, какой из рационов выбрать, необходима статистика.

Что прячется за цифрами

Работа статистика представляет собой удивительную смесь искусства и науки: когда разрабатываются математические модели, отражающие наблюдаемые явления,— это искусство, а когда делаются умозаключения в рамках строгой математической логики — это наука.

Математика, лежащая в основе статистики, дает ей огромную силу: одна математическая модель может одинаково хорошо описывать явления, происходящие в самых разных областях человеческой деятельности, например в политике, промышленности, медицине и сельском хозяйстве.

Нередко данные являются результатом измерений. Примером служит привес поросят, содержащихся на разных рационах.

Дело усложняется природным различием поросят, даже если в начале эксперимента они были одинаковыми и содержались в равных условиях. Статистике приходится повсеместно иметь дело с такими естественными вариациями, они представляют самую суть предмета, первопричину статистики и маскируются под множеством имен. Общее название для них — *ошибочное отклонение* или *ошибки*, но оно не совсем удобно, во всяком случае в биологии. Из того, что Джо выше Билла, нельзя заключить, что у кого-то из них рост ошибочный. Более современное название для неконтролируемых естественных отклонений — *шум* — термин, пришедший в статистику из теории связи и известный там под названием фонового шума.

Приводя пример с откормом поросят первым, мы следуем историческому ходу событий, так как часто статистические методы берут начало в сельскохозяйственных экспериментах. Хотя статистика и пользуется многими давно установленными математическими понятиями, в частности понятием вероятности, она является детищем XX века. Основоположник современных методов планирования эксперимента и его анализа Р. А. Фишер (1890—1962) выполнил фундаментальные работы, обрабатывая данные сельскохозяйственных экспериментов на Ротэмстедской экспериментальной станции в Хартфордшире. Многие из разработанных тогда методов применяются теперь с небольшими модификациями в таких разных областях человеческой деятельности, как промышленность, медицина и общественные науки.

Познакомимся с ошибками поближе

Ошибочные отклонения (или шум), которые в примере с поросятами выражались в разнице весов, имеют непредсказуемую природу. При совершенно одинаковом питании одни поросята прибавляют в весе чуть лучше, чем в среднем, другие — чуть хуже. Иногда возможно уменьшить такие нежелательные отклонения, выбирая поросят по возможности одинаковыми и помещая их в равные условия. Предосторожности такого рода могут быть дорогостоящими и все же не устранят шум полностью, так как никакими предосторожностями нельзя избавиться от различий, заложенных в наследственности.

Шум означает, что другая группа поросят привела бы наш эксперимент к другим результатам. Обусловленная шумом ошибка называется *случайной выборочной ошибкой* или проще — *случайной* либо *выборочной ошибкой*. Слово «случайная» отражает ее непредсказуемость, а «выборочная» означает, что разные выборки (в нашем примере — поросята) привели бы к различным результатам.

Эксперимент ставится, чтобы решить, лучше ли какой-то рацион *в среднем*, и если да, то насколько. Точные цифры привеса мы получим лишь для конкретной выборки поросят, но статистика дает нам инструмент, пользуясь которым можно установить нечто более важное и интересное, а именно: результаты применения любого из рационов ко всей *популяции* (совокупности) поросят будут такими же, как и в эксперименте.

В данном случае нас интересуют *систематические ошибки*, обусловленные конкретным рационом, но присутствие шума затрудняет определение их истинного значения.

Работа статистика заключается не только в том, чтобы отделить систематические ошибки от шума или случайных отклонений. Существует много систем, поведение которых на коротком отрезке времени непредсказуемо, т. е. определяется в основном случайными факторами, тогда как на большом отрезке времени становится регулярным и предсказуемым. Поведение системы, в котором главную роль играют случайные факторы, называется *стохастическим процессом*; это несколько высокопарное название дается всему, что развивается случайным образом.

Городская почта — неплохая модель для изучения таких явлений, как очереди. Обычно некоторое количество расчетных окон или обслуживающих точек выполняет ряд операций по требованию клиентов: у крайнего окна пожилой даме нужна всего одна марка для почтовой открытки, у соседнего — курьер из учреждения собирается купить несколько дорогостоящих почтовых и страховых марок разного достоинства. Кроме того, в очереди стоят люди, желающие сделать почтовые переводы, получить пенсию, заплатить за телефон или справиться о почтовых тарифах и т. д.

Работники почты на основании опыта могут с достаточной точностью предсказать, какое число людей им предстоит обслужить в конкретный день. Они также хорошо представляют себе, сколько времени в среднем необходимо для обслуживания одного клиента, и в общих словах могут рассказать, как оно зависит от клиента. Но бо́льшая неопределенность возникает, если речь идет о времени появления следующего посетителя и времени, необходимом для его обслуживания.

Система усложняется также из-за того, что невозможно предсказать поведение посетителя: встанет ли он (или она) в самую короткую очередь, займет ли очередь, ближайшую ко входу, либо очередь, которую обслуживает хорошенькая блондинка; будет ли он выбирать очередь, пытаясь «угадать» время, необходимое для ее обслуживания; если в одной очереди он видит массу людей с бланками на оформление документов, то, вероятно, не встанет в нее, так как знает, что это — дело долгое; он, по-видимому, не встанет и в очередь, где стоят несколько человек, каждый с кипой бумажек в руках. Сообразительный посетитель, который может быстро оценить, сколько времени уйдет на обслуживание каждой очереди, встанет в ту очередь, не обязательно самую маленькую, которая, по его мнению, продвигается быстрее. Система станет еще сложнее, если люди, считая, что соседняя очередь продвигается быстрее, переходят в нее.

Регулируя систему очередей, стремятся к устойчивости ее поведения в том смысле, что длинная очередь, равно как и долгий «простой» оператора, должны быть редкими. Однако даже устойчивую систему можно разрушить незначительным изменением условий. Система с тремя операторами может работать нормально, если клиенты прибывают в среднем по одному человеку в минуту, но если средний интервал между прибытиями снизится до 57 секунд, система превратится в хаос. И если обслуживание не ускорится, очередь будет расти и расти.

В очередях стоят не только люди, но и корабли, прибывающие в порт, и грузовики, которые доставляют либо забирают товары с фабрики или развозят их по магазинам.

Для исследования стохастических процессов, в частности систем с очередями, статистик строит соответствующую теорию. А электронно-вычислительные машины помогают ему *построить* (проиграть) модель и буквально в считанные секунды воспроизвести поведение системы, в которой приходится стоять в очереди, скажем, несколько недель или даже лет. Моделирование помогает исследовать влияние таких изменений, как введение дополнительной точки обслуживания или ускорение обслуживания.

Экономия ресурсов

В наш век, когда мы, как никогда раньше, сознаем необходимость экономии природных ресурсов или денег, мы научились ценить в должной мере сбор данных. Не только в научных экспериментах, но и в промышленности, и торговле сбор и анализ данных бывают единственным средством получения ответов на важные вопросы. Решение технологической проблемы может сохранить компании многие тысячи долларов. Планировать эксперименты нужно так, чтобы получить правильную информацию (часто в весьма сложных ситуациях) как можно скорее.

Например, завод, производящий органические удобрения, может выпускать разное количество продукции, если один или несколько внешних факторов, таких, как чистота реагентов, температура, давление, влажность, время процесса, меняются. Эти факторы взаимосвязаны, и, чтобы найти их наилучшую комбинацию, иногда приходится действовать методом проб и ошибок. Статистик же в состоянии свести к минимуму элемент случайности и быстро получить правильный ответ.

Чтобы показать, как может помочь статистик, допустим, что количество продукции определяется лишь двумя факторами — давлением и температурой. В эксперименте мы измеряем выход продукции при заданных давлении и температуре. Наша цель — найти такое их сочетание, при котором выход продукции будет максимальным.

Чтобы объяснить, как решается эта проблема, уместно воспользоваться аналогией. Положим, мы имеем контурную карту, на которой можно определить высоту любой точки, зная ее широту и долготу. Представим теперь, что температура — это широта, давление — долгота, а выход продукции — высота. Мы ищем, таким образом, на карте самый высокий пик.

Пусть карту нам не показывают, но позволяют выбрать четыре точки, задавая их широту и долготу, а затем дают высоту каждой из четырех точек. Зная эти значения, можно получить некоторое представление о характере местности. Разыскивая пик, мы получим дополнительную информацию, выбирая четыре следующие точки в направлении, которое кажется относительно наших первых точек идущим «в гору». Этот процесс может быть формализован математически, и он известен как метод *самого крутого восхождения**).

*) В нашей литературе обычно рассматривается спуск в овраг, и метод называется методом скорейшего спуска. (*Прим. пер.*)

Пользуясь этой аналогией, экспериментатор выбирает четыре комбинации температуры и давления (соответствующие широте и долготе) и экспериментально определяет выход продукции для каждой из них. Затем он выбирает другие четыре точки в направлении наибольшего роста и продолжает в том же духе, пока не достигнет пика.

В целом это напоминает способ, пользуясь которым взбираются на гору. Если только на пути нет очевидных препятствий, мы выбираем путь, ведущий прямо вверх. В экспериментальной ситуации имеются два отличия: во-первых, у нас нет непрерывной картины, мы знаем высоты лишь выбранных точек (соответствующих нашим экспериментальным точкам); во-вторых, если мы повторим эксперимент при той же температуре и том же давлении, то, как правило, из-за шума или ошибок выборки не получим тот же выход продукции. Это аналогично правильному считыванию с карты широты и долготы, но совершению малых случайных ошибок в определении высоты.

Если характеристик несколько

Если мы знаем две или более характеристики одного человека, то могут ли эти характеристики помочь нам различить индивидуумов, принадлежащих к двум разным расам? Большинство с первого взгляда может отличить китайца от нигерийца, но менее вероятно отличить танзанийца от нигерийца, если не знать достаточно хорошо эти две страны.

Люди разных национальностей различаются не только качественными характеристиками типа цвета кожи, волос и покроя одежды, но могут также различаться фигурой и ростом, что поддается количественному описанию.

Можно задать вопрос: сколько различных рас представлено в некоей группе индивидуумов? Другой вопрос сформулируем так: имеются данные о некотором числе особей двух или более рас, как по этим данным можно

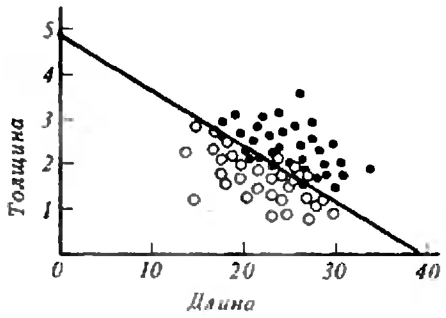


Рис. 1. Длина и толщина бедренной кости человека (●) и обезьяны (○).

выделить расу из другой группы индивидуумов? Задача первого типа известна как задача *классификации*, второго — как задача *распознавания*. Вот простой пример задачи распознавания. У антрополога есть несколько экземпляров бедренной кости, принадлежащих человекообразной обезьяне, и несколько экземпляров, принадлежащих первобытному человеку. Он измеряет длину и толщину каждой кости и наносит значения их на диаграмму, как показано на рисунке 1.

Из рисунка видно, что длина и толщина костей, принадлежащих обоим видам, перекрываются между собой. Однако если мы посмотрим на кружки, соответствующие человеку, и те, что относятся к обезьяне, то увидим, что они распадаются на две группы, а перекрытие их невелико. Прямая, соединяющая на рисунке точку 40 на оси длин и точку 5 на оси толщин, дает разумную границу между двумя группами. За некоторыми исключениями, точки, относящиеся к человеку, лежат выше этой границы, а относящиеся к обезьяне,— ниже.

Очевидно, что для любой точки, лежащей точно на прямой, выражение «длина$+8\times$толщину» равно 40. Для точек выше прямой это выражение больше 40, а для точек ниже прямой оно меньше 40.

Поскольку точки, соответствующие человеку, лежат в основном над прямой, а обезьяне — под ней, можно так классифицировать другие кости неизвестного происхождения: они принадлежат человеку, если выражение «длина$+8\times$толщину» больше 40, и принадлежат обезьяне, если оно меньше 40. Здесь мы считаем, что все кости принадлежат либо человеку, либо обезьяне. Поступая так, мы будем иногда ошибаться, но надеемся, что не слишком часто. Статистик владеет формальными способами определения «наилучшей» линии — границы типа той, которую мы провели на глаз на рисунке 1. В данном случае в слово «наилучший» мы вкладываем тот смысл, что ожидаемое число неверных классификаций будет как можно меньше. Мы можем оценить и достигнутую нами степень точности.

Функция

$$\text{длина}+8\times\text{толщину}$$

называется *функцией распознавания*, так как на основании именно ее значений можно различать кости людей и обезьян.

Часто приходится проводить и больше двух измерений для каждого образца, и тогда нанесения точек на лист бумаги недостаточно. Статистикам известны такие методы, которые сводят к минимуму возможность неверной классификации. Сказанное относится и к случаю, когда групп больше, чем две: например, образцы ископаемых костей могут принадлежать нескольким видам животных.

Задачи классификации и распознавания ни в коей мере не исчерпывают круг задач, связанных с несколькими характеристиками. Биолог, например, может поставить ловушку для насекомых, движущихся в направлении господствующего ветра. Он будет ежедневно записывать число насекомых каждого вида, попавших в ловушку, и измерять скорость ветра, чтобы проверить теорию, по которой насекомые летят по направлению ветра или сносятся им. Его экспериментальные данные подтвердят теорию, если при сильном ветре в соответствующем направлении в ловушку попадется больше насекомых и меньше — при слабом ветре или же при сильном ветре, но дующем не прямо на ловушку.

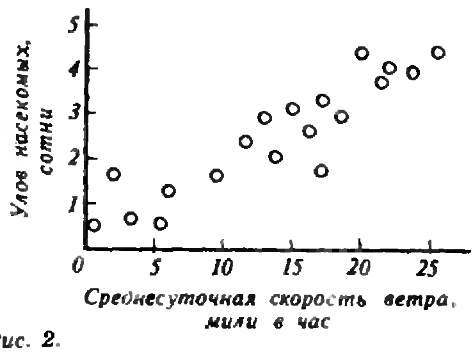


Рис. 2.

Данные наблюдений можно представить графически, откладывая по одной оси силу ветра, и по другой — число пойманных в день насекомых.

Пусть результаты эксперимента образуют картину, представленную на рисунке 2. Экспериментальные данные, показывающие большие числа насекомых, пойманных при сильном ветре, и малые — при слабом, подтверждают теорию, по которой насекомые летят в направлении ветра или сносятся им.

Здесь необходимо сделать одно предостережение. Зависимости между переменными, в особенности более или менее прямо пропорциональные, часто рассматриваются как причинно-следственные. В случае с ветром и насекомыми совершенно разумно считать, что на поимку насекомых влияет сила ветра. Это объяснение естественное, и оно обусловлено нашими представлениями о природе вещей. Мы не сделали бы вывода, что число пойманных насекомых влияет на силу ветра. Это противоречило бы здравому смыслу и расходилось бы с нашим знанием физических и биологических законов. Мы достаточно знаем о причинах, вызывающих ветер, и о его динамическом влиянии на насекомых.

С другой стороны, если обнаруживается строгая прямо пропорциональная зависимость между числом проданных порций мороженого в некотором году и числом проданных солнцезащитных очков, то не нужно рассматривать эти события как причину и следствие: на обе величины повлиял климат, и нет данных, что потребление мороженого меняет светочувствительность глаз или что ношение солнцезащитных очков вызывает страстное желание съесть мороженое.

С точки зрения торговли

Статистика находит все более широкое применение в промышленности и торговле. Владелец сети овощных магазинов заботится о том, чтобы продукты во всех филиалах были хорошего качества и чтобы это качество поддерживалось на высоком уровне.

В большинстве контрактов на поставку оговаривается, что нестандартных или дефектных изделий в каждой партии должно быть не более определенной малой доли. Если какая-то партия не удовлетворяет этому требованию, поставщик обязан или заменить нестандартные изделия, или согласиться на продажу партии по сниженным ценам, или заменить всю партию. Трудность выполнения этого требования состоит в том, что проверка каждого изделия может оказаться чрезмерно дорогой (или даже невозможной, если она сопряжена с разрушением изделия). Заключение, является ли партия товаров приемлемой, делается на основании контроля лишь некоторой выборочной части товаров, или выборки.

Директор овощного магазина закупает несколько тысяч ящиков грейпфрутов и специально оговаривает, что полную цену он заплатит в том случае, если в выборке из 20 ящиков более 98 % плодов высокого качества. Такой подход не гарантирует, что вся партия содержит более 98 % качественного товара, но он по крайней мере указывает на то, что количество испорченных плодов невелико. Проверки такого типа являются примером контроля качества.

Даже бухгалтеры, люди весьма придирчивые к цифрам, и те в целях экономии денег пользуются статистическими методами. Например, некая фирма получает 5123 накладных на поставку деталей, причем каждая на-

(Окончание см. на с. 52)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1366—М1370, Ф1373—Ф1377

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—92» и номера задач, решения которых вы высылаете, например «М1366» или «Ф1373». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимым набором марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1366—М1370 предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 1992 году.

М1366. Точки M и N — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC \parallel AD$ и $BD \parallel AE$. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны (O — точка пересечения отрезков BN и AM).

М1367. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и т. д. (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпании. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона.

М1368. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности.

б) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ADC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам.

М1369. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}=c-zx, \\ \dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}=a-xy, \\ \dfrac{c}{z}-\dfrac{a}{y}=b-yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры.

М1370. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21 г. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

Ф1373. Однородная длинная пружина состоит из большого числа одинаковых витков и имеет в недеформированном состоянии длину L. Пружину поставили вертикально внутрь высокого цилиндра с гладкими стенками, при этом длина пружины уменьшилась в два раза. Затем в цилиндр налили воду до уровня,

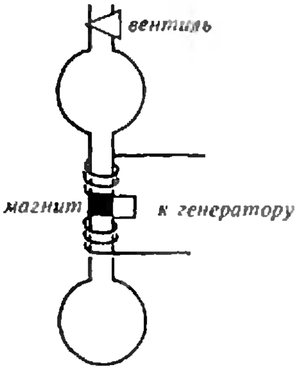


Рис. 1.

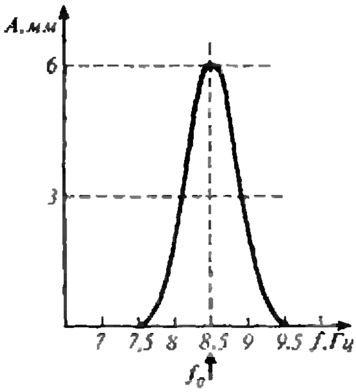


Рис. 2.

равного $L/2$. Какой стала длина пружины в этом случае? Плотность материала пружины ϱ, плотность воды ϱ_0.

С. Кротов

Ф1374. Два сосуда объемом $V=0,5$ л каждый соединены вертикальной стеклянной трубкой сечением $S=1$ см^2 (рис. 1). Трубка перекрыта подвижным поршнем-магнитом массой $m=2,0$ г, который может двигаться вдоль трубки без трения. При помощи катушек, подключенных к генератору переменного напряжения, возбуждают колебания поршня вдоль трубки. На рисунке 2 приведена экспериментально полученная зависимость амплитуды установившихся колебаний поршня от частоты приложенного переменного напряжения. Определите по этим данным отношение молярных теплоемкостей C_p/C_V для воздуха.

В первом опыте вентиль наверху был закрыт. При какой частоте наступит максимум при открытом вентиле? Оцените амплитуду колебаний поршня в этом случае на частоте f_0. Давление воздуха $p_0=1$ атм.*)

Ф1375*. Пленка при температуре $t_1=+50$ °С имеет коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_1=0,020$ Н/м. После увеличения температуры до $t_2=+51$ °С коэффициент поверхностного натяжения падает до $\sigma_2==0,0195$ Н/м. Будем медленно растягивать пленку так, чтобы ее температура оставалась постоянной. Поглощает пленка при этом тепло из окружающей среды или, наоборот, отдает его? Оцените количественно этот теплообмен при растяжении пленки от $S_1=1$ м^2 до $S_2=1,5$ м^2 при температуре $+50$ °С.

Указание. Подумайте, как применить тут формулу для КПД цикла Карно.

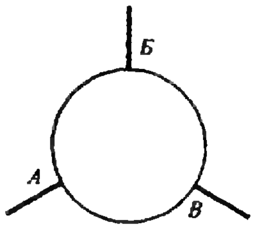


Рис. 3.

Ф1376. При исследовании «черного ящика» с тремя выводами (рис. 3) были измерены его сопротивления: $R_{АБ}=300$ Ом, $R_{БВ}\approx R_{АВ}\approx 120$ кОм. Известно, что внутри находятся три резистора. Что можно сказать о схеме их соединения и о величинах их сопротивлений, основываясь на приведенных результатах?

Какие измерения еще нужно провести, чтобы определить сопротивления резисторов в «ящике»? В вашем распоряжении батарейка напряжением 4,5 В и авометр «Школьный».

А. Зильберман

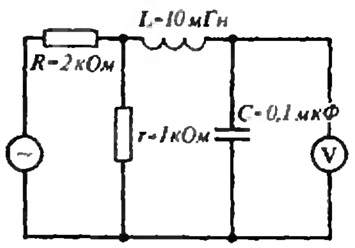


Рис. 4.

Ф1377. Для исследования резонанса собрана схема, показанная на рисунке 4. При какой частоте генератора вольтметр дает максимальные показания? Чему равно это максимальное напряжение, если амплитуда напряжения генератора $U_0=1$ В? Как изменятся максимальные показания вольтметра при уменьшении сопротивления r от 1 кОм до 100 Ом? Все элементы схемы можно считать идеальными.

З. Рафаилов

*) Эта задача была «запасной» на Международной физической олимпиаде 1991 года.

Задачник „Кванта“

Решения задач

М1336 — М1340, Ф1353 — Ф1357

М1336. Докажите для любых натуральных чисел m и n, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1.$$

Докажем, что неравенство

$$(1+x)^\alpha<1+\alpha x \qquad (*)$$

выполняется при $0<\alpha<1$ и $x>0$. Пусть

$$f(x)=(1+x)^\alpha-\alpha x-1.$$

Имеем

$$f(0)=0,$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha<0$$

при $x>0$. Следовательно, при $x\geqslant 0$ функция $f(x)$ убывает, поэтому $f(x)<f(0)=0$ при $x>0$.

Пользуясь неравенством (*), получаем, что

$$(1+m)^{1/n}<1+\frac{m}{n},\ (1+n)^{1/m}<1+\frac{n}{m},$$

откуда сразу следует, что

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}}>\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1.$$

В. Сендеров

М1337. Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через одну точку фигуры проведены параллельные этим осям прямые, которые делят фигуру на 8 частей, раскрашенных поочередно в голубой и розовый цвета (рис. 1). Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых.

Решим сначала эту задачу для квадрата.

Можно доказать равенство площадей голубых и розовых частей просто вычислением. Введем систему координат так, чтобы центр квадрата имел координаты (0; 0), а его вершины — $(\pm 1, \pm 1)$. Можно (в силу симметрии) считать, что точка P пересечения прямых имеет координаты $(a;\ b)$, где $a\geqslant b$ (рис. 2). Тогда в верхней по отношению к P области $y\geqslant b$ площадь розовых частей больше площади голубых на величину

$$2(1-b)-(1-a)^2-(1-b)^2=2a-a^2-b^2,$$

а в нижней ($y\leqslant b$) площадь голубых превышает площадь розовых на ту же величину:

$$2(1+b)-(1-a)^2-(1+b)^2=2a-a^2-b^2.$$

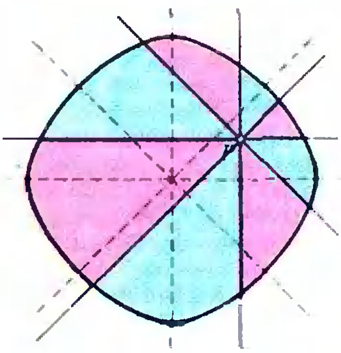


Рис. 1.

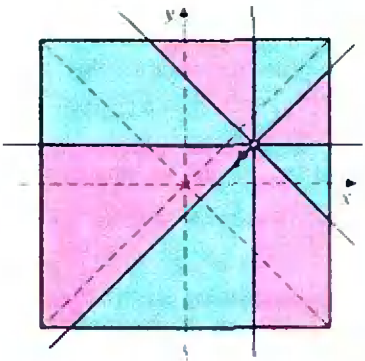


Рис. 2.

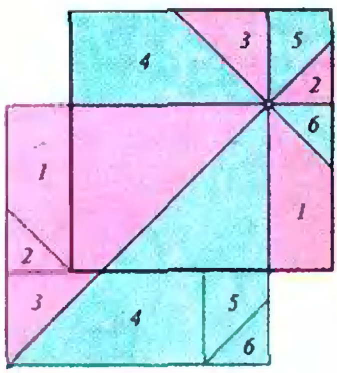


Рис. 3.

То же самое можно доказать «разрезанием и складыванием» (см. рис. 3; равные части обозначены одинаковыми цифрами).

Теперь решим задачу в общем виде.

Вокруг любой выпуклой фигуры можно описать квадрат с теми же осями симметрии. Достаточно доказать равенство площадей голубых и розовых частей в каемке между квадратом и фигурой (рисунки 4, *а* и 4, *б* показывают два немного отличающихся возможных

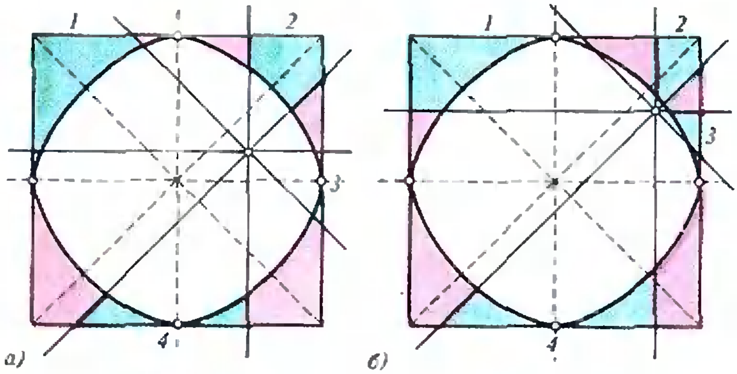


Рис. 4.

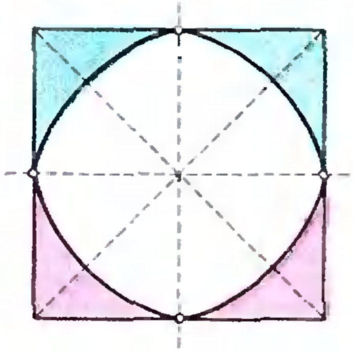


Рис. 5.

расположения кусочков каемки). Разрезанием и симметричным отражением нетрудно составить из частей этой каемки каемку, половина которой будет голубой, а половина — розовой (рис. 5; из голубых кусочков *1* и *3*, например, можно составить одну четвертушку, из кусочков *2* и *4* — вторую).

Интересно выяснить, насколько далеко можно обобщить этот результат. Например, верно ли аналогичное утверждение для фигуры с $4n$ осями симметрии и $4n$ прямых?

В. Произволов

М1338. *Укажите способ вычисления 2^n-го числа f_{2^n} последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$ $(k>1)$ не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания.*

Очевидна следующая цепочка равенств:

$$u_{n+k}=u_2u_{n+k-1}+u_1u_{n+k-2}=u_3u_{n+k-2}+u_2u_{n+k-3}=\ldots$$
$$\ldots=u_{k+1}u_n+u_ku_{n-1}.$$

Положив $k=n$ и $k=n-1$, получим равенства

$$u_{2n-1}=u_n^2+u_{n-1}^2,$$
$$u_{2n}=u_{n+1}u_n+u_nu_{n-1}=u_{n+1}^2-u_{n-1}^2.$$

Следовательно, пару $(u_{2n-1};\ u_{2n})$ можно вычислить через $(u_{n-1};\ u_n)$ за шесть операций:

$$(u_{n-1};\ u_n)\to(u_{n-1};\ u_n;\ u_{n+1})\to(u_{n-1}^2;\ u_n^2;\ u_{n+1}^2)\to$$
$$\to(u_{n-1}^2+u_n^2;\ u_{n+1}^2-u_{n-1}^2)=(u_{2n-1};\ u_{2n}).$$

Отправляясь от $(u_0;\ u_1)=(0;\ 1)$ и совершая вышеописанный рекуррентный переход k раз, получим пару $(u_{2^k-1};\ u_{2^k})$ за $6k$ операций сложения, вычитания и умножения.

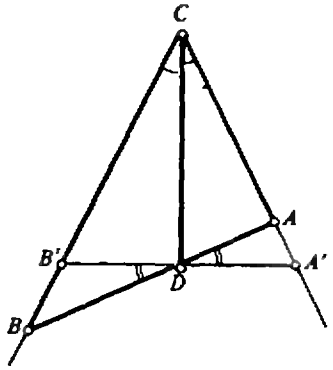
Замечание. С помощью рекуррентного перехода, используемого при решении задачи, можно построить очень эффективный алгоритм для вычисления остатка от деления n на некоторое натуральное q при больших номерах n. Подумайте, как это сделать.

В. Быковский

***М1339.** Дан треугольник ABC. Пусть S — его площадь, γ — угол ACB, а l — длина биссектрисы, проведенной из вершины C.*

а) Докажите, что $S \geqslant l^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

б) Для каких треугольников ABC выполняется равенство?



Первое решение. Обозначим через a и b стороны BC и AC треугольника ABC.
Имеем

$$l = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\gamma}{2}$$

(докажите это).
Тогда

$$l^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{4ab}{a^2+b^2+2ab} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4ab}{2ab+2ab} \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma = S.$$

Очевидно, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=2ab$, т. е. тогда и только тогда, когда $a=b$.

Второе решение. Пусть $a > b$, тогда $\angle A > \angle B$, и угол CDB — тупой. Проведем через точку D отрезок $A'B'$ (см. рисунок), перпендикулярный CD.

Поскольку $BD > AD$ (это легко следует из соотношения $BC/AC = a/b > 1$), площадь треугольника BDB' больше площади треугольника ADA'. Поэтому $S > S_{A'CB'} = l^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$. При $a=b$ равенство $S = l^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ очевидно.

Н. Немировская, В. Сендеров

***М1340.** На красной окружности произвольным образом отмечены $N \geqslant 4$ различных синих точек. Начиная с какой-нибудь из них, будем перекрашивать каждую вторую синюю точку (по часовой стрелке) в красный цвет, соединяя ее при этом хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и т. д., пока на окружности не останется синих точек. На сколько частей распадется внутренность окружности, если ее разрезать по всем проведенным линиям, при а) $N=32$? б) $N=1992$?*

Ответ: а) 86; б) 5960.

Занумеруем все точки подряд по часовой стрелке числами от 1 до N так, чтобы первой перекрашивалась точка 2 (второй — точка 4 и т. д., см. рис. 1 и 2).

Обозначим через $A(N)$ искомое число частей, через $S(N)$ — число хорд, выходящих из точки 3.

Докажем по индукции, что для любых N точек на окружности $A(N)$ определяется однозначно:

$$A(N) = A(N-1) + S(N-1) + 1.$$

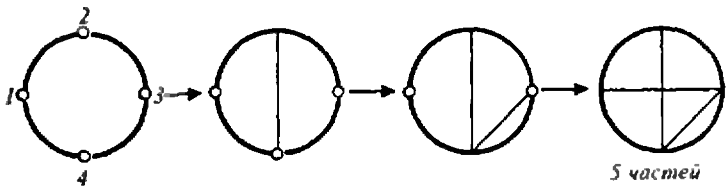


Рис. 1.

Для $N=4$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $N=k$. Отметим на окружности произвольным образом $k+1$ точек. Проведем хорду 2—4 и перекрасим точку 2. Получим окружность с k точками, для которой число частей определяется однозначно. Проведя хорду 2—4, мы, очевидно, увеличим число частей на $S(k)+1$, откуда

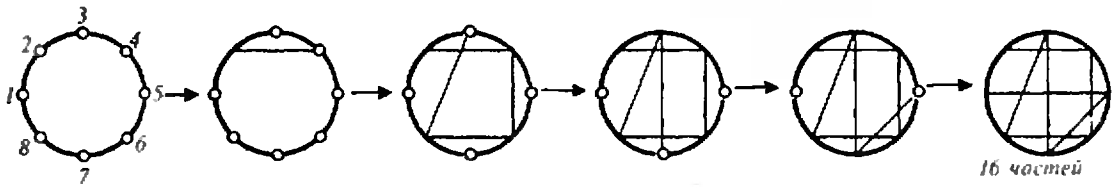


Рис. 2.

$$A(k+1)=A(k)+S(k)+1,$$

т. е. для любого $N\geqslant 4$

$$A(N)=A(N-1)+S(N-1)+1.$$

Но из точки 3 может выходить либо 2 хорды, либо 1 (когда точка 3 перекрашивается последней). Поэтому число частей может увеличиваться при добавлении точки соответственно либо на 3, либо на 2.

Выясним, при каких N последней перекрашивается точка 3. Пусть на окружности отмечено $N=2^k$ точек. Пройдя окружность один раз, мы перекрасим $2^k/2=2^{k-1}$ точек, останется $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ точек, причем следующей вновь будем перекрашивать первую (по часовой стрелке) точку после точки 1. Проходя круг за кругом, мы придем в конце концов к 2^0-й точке. Нетрудно видеть, что это — точка 1. Если же на окружности отмечено $N=2^k+l$ точек, где $2^k\leqslant N<2^{k+1}$, то, перекрасив l точек, мы придем к случаю $N=2^k$, но роль точки 1 будет играть теперь точка $2l+1$ (она есть на окружности, т. к. $l\leqslant 2^k+1$ и, следовательно, $2l\leqslant 2^k+1+l<N$), а значит, она и будет перекрашена последней.

Можно выписать общую формулу для номера последней точки m:

$$m=2(N-2^{[\log_2 N]})+1.$$

Поэтому точка 3 перекрашивается последней тогда и только тогда, когда $2l+1=3$, $l=1$, т. е. для всех $N=2^k+1$, $k\in N$.

Теперь, учитывая, что $A(3)=3$, $S(3)=1$, уже нетрудно выписать общую формулу, верную для всех $N\geqslant 4$:

$$A(N)=3+3(N-[\log_2(N-1)]-3)+2[\log_2(N-1)]=$$
$$=3N-6-[\log_2(N-1)].$$

В частности, поскольку $2^{10}<1991<2^{11}$, то

$$[\log_2 1991]=10 \text{ и } A(1992)=3\cdot 1992-6-10=5960.$$

С. Дориченко

Задачник „Кванта"

Ф1353. *Найдите минимально возможный период обращения космического корабля вокруг Солнца*), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад.*

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\frac{T^2}{a^3}=\text{const};$$

следовательно, чем меньше радиус a орбиты космического корабля, тем меньше период T его обращения вокруг Солнца. Минимальному периоду обращения соответствует минимальный радиус орбиты, т. е. просто радиус Солнца:

$$a_{\min}=R_{\text{С}}=(\alpha/2)R_{\text{С}-\text{З}},$$

где $R_{\text{С}-\text{З}}$ — расстояние от Солнца до Земли. Теперь сравним движения корабля и Земли вокруг Солнца:

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3}=\frac{T_{\text{З}}^2}{R_{\text{С}-\text{З}}^3}.$$

Отсюда, зная период обращения Земли $T_{\text{З}}=365{,}25$ суток, получаем

$$T_{\min}=T_{\text{З}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3/2}\approx0{,}116\ \text{суток}\approx2\ \text{ч}\ 47\ \text{мин}.$$

М. Гаврилов

*) К сожалению, в ранее опубликованном условии задачи в этом месте допущена опечатка. Редакция приносит извинения читателям и автору задачи.

Ф1354. *Шайба массой M скользит по льду со скоростью v_0 и налетает на неподвижную шайбу, масса которой $2M$. После удара первая шайба останавливается, а вторая начинает двигаться. Она достигает бортика и, упруго от него отразившись, ударяет первую шайбу «в лоб». Найдите скорости обеих шайб после этого. Считайте, что при соударении шайб в тепло переходит определенная часть максимальной энергии деформации.*

Конечно, можно рассчитывать все удары шайб при помощи закона сохранения импульса и баланса энергий (с учетом тепловых потерь), но у этой задачи есть совсем простое решение.

Очевидно, что после первого удара шайба *2* имеет скорость $v_0/2$. Для расчета удара шайб после отражения от бортика удобно «пересесть» в систему отсчета, которая едет со скоростью $v_0/2$ от стенки. В этой системе шайба *2*, как и перед первым ударом, неподвижна, а шайба *1* снова едет прямо на нее — правда, ее скорость теперь в 2 раза меньше. После второго удара шайба *1*, как и после первого удара, остановится, а шайба 2 приобретет скорость $v_0/4$.

В неподвижной же системе отсчета скорость шайбы *1* будет равна $v_0/2$ и направлена от стенки, а скорость шайбы *2* будет равна $v_0/4$ и направлена тоже от стенки.

А. Варгин

Ф1355. *Нагреватель для аквариума Н подключен к батарее последовательно с амперметром, который показывает ток 0,1 А (рис. 1). К точкам А и Б под-*

Поскольку сопротивление амперметра мы считаем равным нулю, при перестановке резистора (рис. 2) ток через батарею не меняется. Отсюда следует, что ток нагревателя (сопротивлением Z) равен 0,05 А, а ток резистора (сопротивлением R) составляет 0,25 А. Тогда

$$\frac{Z}{R}=5.$$

При параллельном соединении нагревателя и резистора общее их сопротивление получается равным $Z/6$.

Сравним токи при подключении резистора и без него:

ключили резистор, после чего ток упал до 0,05 А. Резистор отключили от А и Б и подключили к точкам В и Г — ток в этом случае составил 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях. Сопротивления амперметра и проводов пренебрежимо малы.

Примечание: КПД схемы — это отношение мощности нагревателя к полной мощности, производимой батареей.

$$\frac{U}{Z+r}=0{,}1\,\text{А},\quad \frac{U}{Z/6+r}=0{,}3\,\text{А}.$$

Отсюда

$$r=\frac{Z}{4}.$$

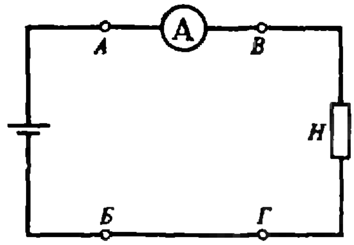


Рис. 1.

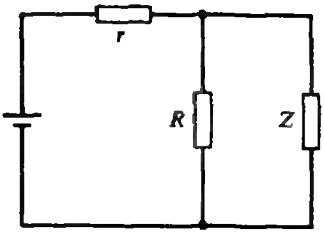


Рис. 2.

Теперь ясно, что в первом случае КПД составляет

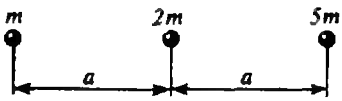
$$\eta_1=\frac{Z}{Z+r}=0{,}8=80\ \%.$$

Во втором и в третьем случаях КПД одинаковы. При этом ток через батарею возрос в 3 раза, т. е. полная мощность стала в 3 раза больше, а ток нагревателя упал в 2 раза, значит, полезная мощность стала в 4 раза ниже. В результате

$$\eta_2=\eta_3=\frac{\eta_1}{12}=\frac{1}{15}\approx 6{,}67\ \%.$$

З. Рафаилов

Ф1356. Три маленьких заряженных шарика закреплены на одной прямой, расстояние между соседними шариками a (см. рисунок). Массы шариков m, 2m и 5m, заряды их q, q и 2q соответственно. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния.



После разлета шариков на большие расстояния их суммарная кинетическая энергия будет равна начальной энергии взаимодействия

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{a}+\frac{2q^2}{a}+\frac{2q^2}{2a}\right)=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}.$$

А вот ответить на вопрос — как эта энергия распределится между шариками, в общем виде (для произвольных зарядов и масс) вам наверняка не удастся (это очень сложная задача!). Однако числа в условии подобраны так, чтобы задачу все же можно было решить.

Найдем начальные ускорения шариков — это совсем легко:

$$a_1=\frac{q^2+2q^2/4}{4\pi\varepsilon_0 ma^2},\quad a_2=\frac{2q^2-q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2ma^2},\quad a_3=-\frac{2q^2+2q^2/4}{4\pi\varepsilon_0\cdot 5ma^2}.$$

Видно, что $|a_1|:|a_2|:|a_3|=3:1:1$ и ускорение шарика массой $5m$ направлено противоположно ускорениям шариков, массы которых m и $2m$. Заметим, что относительно среднего шарика ускорения крайних получаются одинаковыми — значит, они одинаково набирают скорости относительно среднего шарика и он все время будет находиться точно посередине между ними (ведь отношение ускорений сохраняется постоянным). Тогда $|v_1|:|v_2|:|v_3|=3:1:1$, и теперь ясно, как распределяется между шариками полная кинетическая энергия:

$$\frac{m(3v)^2}{2}+\frac{2mv^2}{2}+\frac{5mv^2}{2}=W=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ma}},$$

$$v_1=3v,\ v_2=-v_3=v.$$

А. Зильберман

***Ф1357.** При помощи фотоаппарата «Смена» делают снимок светящейся точки с расстояния 1 м. Рука фотографа дрожит, и вместо точки на пленке получается небольшое пятно. Оцените размеры этого пятна, если амплитуда смещения любой точки фотоаппарата не превышает 1 мм. Фокусное расстояние объектива 50 мм. Выдержку считайте большой.*

Вначале нужно разобраться — при каком именно смещении точек аппарата получается пятно максимального диаметра. Сразу видно, что сдвиг «взад-вперед» практически не приводит к размазыванию пятна (вспомните о так называемой глубине резкости). Сдвиг «вверх-вниз» также не очень опасен — это все равно, что двигать «вверх-вниз» фотографируемый предмет, а при расстоянии до него 1 м угловой размер точки предмета составит 2мм/1 м$\approx$0,002 и изображение точки будет иметь диаметр

$$d_1=0{,}002\cdot 50\ \text{мм}=0{,}1\ \text{мм}.$$

Гораздо хуже, если фотоаппарат «качается» по углу относительно направления на предмет, т. е. когда крайние точки фотоаппарата двигаются в разные стороны друг относительно друга. Максимальный угол получится тогда, когда эти крайние точки ближе всего друг к другу — т. е. это верх и низ.

Высота фотоаппарата «Смена» равна примерно 80 мм, поэтому угол поворота

$$\alpha\approx 2/80=1/40\ \text{рад}.$$

Это дает диаметр пятна

$$d_2=2\alpha F\approx 2(1/40)50\ \text{мм}\approx 2{,}5\ \text{мм}.$$

Отсюда следует, что фотографировать с большой выдержкой в таком состоянии не следует.

А. Ящиков

Поправка: В формулировку задачи про Тома Сойера (М1344, «Квант» № 5, с. 23) вкралась ошибка: легко видеть, что в условиях задачи доля окрашенной площади может быть сколь угодно малой. Приводим исправленную формулировку (срок присылки решений продлевается до 1 декабря):

Том Сойер красит забор, состоящий из бесконечной последовательности прямоугольных досок разной ширины и высоты. Каждая доска на 1 % уже, чем предыдущая, и выше нее, но не выше 2 м. Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2 %, красит ее, а в противном случае — пропускает. Может ли забор быть таким, что он покрасит не менее: а) 40 %, б) 50 %, в) 60 % площади забора?

Задачи

1. Какое наибольшее число полей можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было пройти ровно двумя ходами коня?

2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. На плоскости даны две прямые и точка M. Найдите на одной из прямых точку X такую, что отрезок MX делится другой прямой пополам.

4. В комнате находятся 12 человек. Некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Один из них сказал: «Здесь нет ни одного честного человека», второй: «Здесь не более одного честного человека», третий: «Здесь не более двух честных людей» и т. д., двенадцатый: «Здесь не более одиннадцати честных людей». Сколько в комнате честных людей?

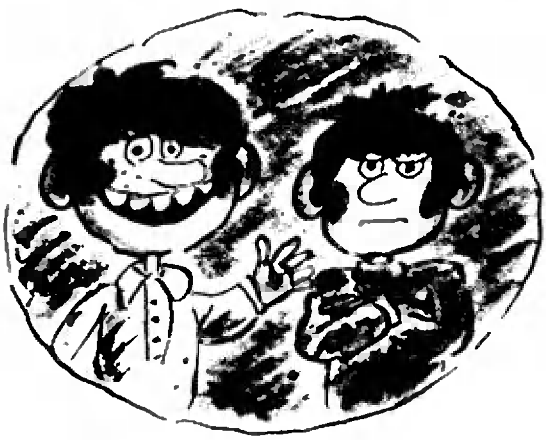
5. Продолжите последовательность чисел:
1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...

Эти задачи нам предложили В. Произволов, П. Филевич, В. Чичин, Д. Фомин и А. Савин.

СЕАНС ПАРАПСИХОЛОГИИ

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН,
кандидат педагогических наук
Е. СЕМЕНОВ

На математическом вечере в нашей школе с большим успехом прошло выступление двух «экстрасенсов» — учеников 7 «А» класса Степы Мошкина и Тимура Егорова.



— Уважаемые зрители,— начал Степа,— Тимур обладает удивительной способностью читать мои мысли. Не далее как вчера он дал мне списать домашнее задание, хотя я его об этом еще не успел попросить. А после моего ответа на уроке географии он, не глядя в мой дневник, точно назвал отметку, которую туда поставила Людмила Николаевна. Замечу, что лучше всего мне удается передавать ему именно числа, и вы сейчас в этом убедитесь сами. Правда, я при этом должен поддерживать с ним контакт — словами активизировать его экстрасенсорные способности. Итак, сейчас на доске каждый из вас может написать любое число, а Тимур, стоя спиной к доске, назовет его, прочтя это число в моих мыслях. Кто первый?

К доске подбежала шустрая пятиклассница и написала число 87.

— Замечательно, Женя! — воскликнул Степа.

— Я не Женя, а Оля,— обиделась пятиклассница.

— Извини, Оля, а я займусь активизацией телепатических способностей Тимура,— ответил Степа.

— Не нужно,— заявил Тимур,— я знаю, что это число 87.

Зал ахнул, но один второклассник крикнул: — Халтура! Ему подсказали на пальцах число из зала!

— Спокойно,— подняв руку, твердо сказал Степа,— мы усложняем эксперимент. Я завязываю Тимуру глаза! — и он обмотал голову Тимура полотенцем, оставив свободным лишь его рот.

К доске вразвалку подошел десятиклассник и написал число 33.

— Вот второе! — объявил Степа,— сосредоточься и назови.

— Это 33,— произнес Тимур.

Зал вновь зашумел, а в это время юркий первоклассник уже записывал на доске число 54.

— Думай, гадай,— взглянув на число, произнес Степа.

— Это число — 54,— заявил Тимур, почесав полотенце на затылке.

У сцены уже выстроилась очередь из желающих написать свое число. На доске появилось число 9.

— Интересное число,— прокомментировал его Степа, а Тимур тут же произнес: — Это число 9.

Увидев следующее число 111, Степа воскликнул: — Ай-ай-ай, такие большие числа очень трудно отгадывать. И немедленно Тимур назвал это число.

— Степа подсказывает! — крикнули из зала.

— А как? — отпарировал Степа.— Хорошо, я уйду, а Тимур без меня будет демонстрировать свои выдающиеся телепатические способности.— Степа торжественно сошел со сцены, а Тимур произнес:

— Опасный эксперимент! Прошу к доске стопроцентно здорового и интеллектуально полноценного индивидуума!

У доски снова оказалась пятиклассница Оля.

— Итак,— продолжал Тимур,— Степа ушел, полотенце у меня на глазах. Пусть тот, кто находится у доски, напишет число.

Оля написала число 14, а Тимур поднес руки к голове и произнес: — Мне необходимо, чтобы об этом числе

постоянно думали, а еще лучше, чтобы с ним проводили арифметические действия. Ну-ка, прибавь к числу 11 и запиши. Теперь возведи оба записанных числа в квадрат. Отними от большего квадрата меньший. Готово? Сколько получилось?

— 429,— ответила девочка.

— Было задумано число 14,— объявил Тимур после недолгого размышления.

Я схватил ручку и листок бумаги, чтобы разобраться в этом фокусе, но тут Тимур снова пригласил желающего на сцену. Меня словно кто в спину толкнул — через три секунды я был уже на сцене.

— Рекордный эксперимент,— произнес Тимур,— я начиняю работать с трехзначными числами. Запиши трехзначное число,— сказал он, чуть повернувшись ко мне. Я иаписал 238 — номер моего почтового отделения.

— Припиши к нему еще раз это число!

Я написал: 238238.

— Умножь полученное число на 2,— потребовал Тимур.

Попыхтев, я написал 476 476.

— Раздели полученное число на 7,— последовал новый приказ.

Я начал делить. Число 476 разделилось на 7, и я легко получил результат: 68 068.

— Теперь раздели полученное число на 11,— сказал Тимур.

Как ни странно, но 68068 разделилось на 11 и в результате получилось число 6188.

— А теперь раздели полученное число на 13!

— А если не разделится? — робко спросил я.

— Раньше все делилось — разделится и сейчас,— ответил Тимур.

Я начал у края доски делить уголком 6188 на 13. К моему удивлению, деление произвелось нацело.

— Разделилось? — спросил Тимур.

— Да, — ответил я, — получилось 476.

— Тобой было задумано число 238,— торжественно произнес Тимур.— Сотри доску для следующего.

Когда я поднял руку с тряпкой, чтобы стереть доску, то с удивлением заметил, что я делил число 476 476, а получил 476. В чем же здесь фокус? Я двинулся было на свое место, как меня остановил голос Тимура.

— Прошу задержаться,— сказал он, вытаскивая из кармана конверт.— Возьми этот конверт и храни его в течение следующего эксперимента. А тот, кто стоит у доски, пусть напишет число, большее 50, но меньшее 100.

Стоявший у доски Петя Яблочкин из 6 «Б» написал число 69.

— Прибавь к нему 86,— попросил Тимур.

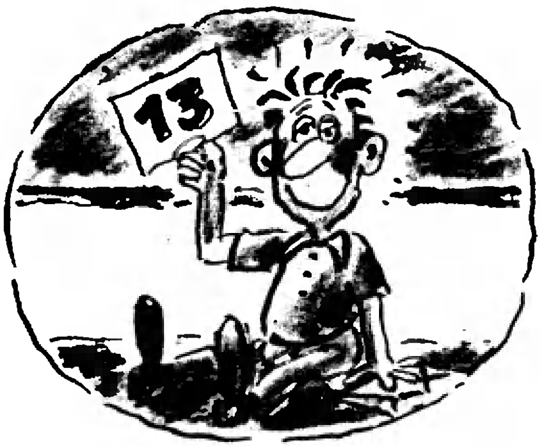
На доске появилось число 155.

— Сотри первую цифру и прибавь ее к оставшемуся числу.

Петя записал число 56.

— Вычти это число из первоначального,— последовал новый приказ.

На доске появилось число 13.



— Теперь посмотрите, что лежит в конверте! — воскликнул Тимур.

Я открыл конверт. На открытке, вложенной в него, крупно было написано число 13. Я был поражен. Сколько я ни думал — ничего понять не мог. А вы поняли секреты фокусов? Если нет, то посмотрите объяснения в конце журнала.

Конкурс «Математика 6—8»

Э. Н.

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Победители будут награждены призами журнала «Квант».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 января 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

4. Гавиал, бегемот, пеликан и кашалот съели в общей сложности 37 рыб, причем кашалот съел во столько же раз больше пеликана, во сколько пеликан съел больше гавиала. Сколько съел каждый?

И. Акулич

5. Внутри треугольника отмечена точка M. Пусть L — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку M с вершинами, а l — длина наименьшего из отрезков, соединяющих точку M с серединами сторон. Докажите, что $L \geqslant 2l$.

В. Произволов

5. Когда закончился волейбольный турнир (в один круг), оказалось, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и все побежденные ею команды. Сколько команд участвовало в турнире?

С. Токарев

Калейдоскоп „Кванта"

Мой новый прибор... по своим действиям подражает лейденским банкам или электрическим батареям (имеются в виду батареи конденсаторов — А. Л.), вызывая такие же сотрясения, как и они.

А. Вольта

Искра при открытии цепи будет сильнее, когда длинную соединительную проволоку наматывают на цилиндр в виде спирали, а еще сильнее, когда цилиндр будет железный.

Э. Ленц

А так ли хорошо знакомы вам

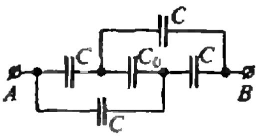
емкость и индуктивность ?

По существу, Вольта и Ленц упоминают известные вам устройства — конденсатор и соленоид, характеристиками которых являются емкость и индуктивность. Интересно, что если первый электрический конденсатор — лейденская банка — появился на свет, можно сказать, не специально, то соленоид был «открыт» Ампером в ходе целенаправленных опытов по исследованию магнитного действия электрического тока. Единицы измерения емкости и индуктивности впоследствии получили имена Фарадея и Генри, чем, надо полагать, физики не только отдали дань знаменитым ученым, но и подчеркнули важность этих понятий.

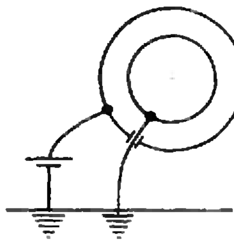
Безусловно, и емкости, и индуктивности можно было бы посвятить отдельные выпуски «Калейдоскопа». Но история науки распорядилась так, что им пришлось «поработать» и рука об руку. Как только выяснилось, что разряд лейденской банки, а затем и индукционной катушки, носит колебательный характер, в исследования колебательного контура включилась целая плеяда видных физиков — Гельмгольц, Томсон (лорд Кельвин), Кирхгоф и др. Увенчалось это «наступление» на колебательный контур открытием Герцем электромагнитных волн, что возвестило начало эпохи радио и телевидения. Какой бы областью электро-, радио- и телетехники сегодня мы ни заинтересовались, везде обнаружим либо сами конденсаторы и катушки, либо «отголоски» их присутствия в более совершенных приборах. Так происходит везде, где встречаются переменные токи и электрические колебательные процессы.

Вопросы и задачи

1. Всегда ли одинаковы емкости двух одинаковых изолированных проводников?
2. Можно ли зарядить лейденскую банку, не заземляя одну из обкладок?
3. Какова примерно электрическая емкость вашего тела?
4. Изменится ли емкость плоского конденсатора, если в воздушный зазор между его обкладками ввести незаряженную тонкую металлическую пластину?
5. Найдите емкость системы конденсаторов, включенных между точками A и B, как показано на рисунке.



6. Пластины заряженного плоского конденсатора попеременно заземляют. Что будет происходить с конденсатором при этом?
7. Плоский конденсатор подключен к источнику постоянной ЭДС. Что нужно сделать, чтобы вокруг конденсатора возникло магнитное поле?
8. В системе, изображенной на рисунке, соединяют с землей один раз внешнюю сферу, другой раз — внутреннюю. Будет ли одинакова емкость такого конденсатора в этих случаях?



9. Почему, если параллельно рубильнику включить конденсатор, искрение при размыкании рубильника прекращается?
10. Поверх длинного соленоида вплотную намотана катушка. Ток в соленоиде нарастает прямо пропорционально времени. Каков характер зависимости тока от времени в катушке?

11. В городскую сеть включили катушку с большим числом витков. Измерив протекающий по катушке переменный ток, установили, что ее сопротивление равно 20 Ом. Затем поверх этой катушки намотали точно такую же вторую и включили ее в цепь параллельно первой. Будет ли общее сопротивление катушек составлять 10 Ом?

12. Что произойдет, если трансформатор, рассчитанный на переменное напряжение первичной цепи 127 В, включить в сеть постоянного тока с напряжением 110 В?

13. Разборный школьный трансформатор, ко вторичной обмотке которого подключена нагрузка, включен в сеть. Как изменится ток в первичной и вторичной катушках при удалении верхней части сердечника?

14. Колебательный контур состоит из конденсатора постоянной емкости и катушки, в которую может вдвигаться сердечник. Один сердечник спрессован из порошка магнитного соединения железа (феррита) и является изолятором. Другой изготовлен из меди. Как изменится частота собственных колебаний контура, если в катушку вдвинуть а) медный сердечник, б) сердечник из феррита?

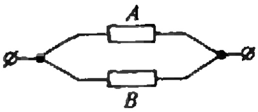
15. В колебательном контуре изменили начальную величину заряда на конденсаторе. Какие характеристики возникающих в контуре электрических колебаний изменятся от этого, а какие — нет?

16. Что произойдет, если заряженный конденсатор соединить сверхпроводником с таким же незаряженным конденсатором?

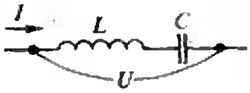
17. Входящий в колебательный контур плоский конденсатор таков, что его пластины могут перемещаться одна относительно другой. Каким образом осуществить «раскачку» контура посредством перемещения пластин?

18. Цепь переменного тока состоит из трех последовательно соединенных сопротивлений: омического, индуктивного и емкостного. Может ли одновременное увеличение каждого из них привести к уменьшению общего сопротивления?

19. По цепи, изображенной на рисунке, передаются одновременно постоянный ток и ток высокой частоты. Что нужно сделать, чтобы в ветви A проходил только постоянный ток, а в ветви B — только высокочастотный?



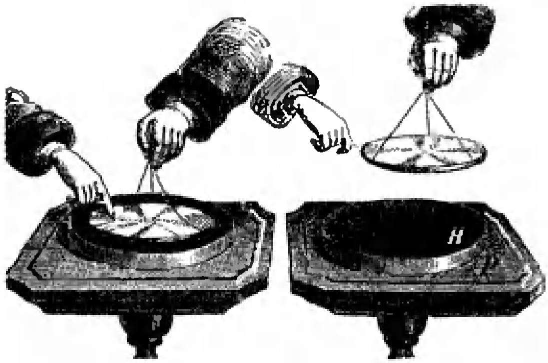
20. На рисунке показан участок цепи переменного тока. В каком случае напряжение U не зависит от величины тока I?



Микроопыт

Ваш приемник может настраиваться на прием радиоволн различной длины. Как вы должны изменять емкость или индуктивность приемного колебательного контура при настройке на более длинные волны?

Любопытно, что...



...немецкий каноник фон Клейст, независимо от голландского профессора Мушенбрука проведший опыт с лейденской банкой и испытавший ее разряд, пытался, по-видимому, использовать ее для получения электризованной воды, считавшейся полезной для здоровья.

...в 1827 году французский ученый Савар обнаружил, что после разряда лейденской банки через проволоку, намотанную на железную спицу, последняя часто оказывалась намагниченной. Удивительным же было то, что на одном и том же конце спицы появлялся иногда северный, а иногда южный полюс, хотя банка все время заряжалась одинаково. Объяснение пришло позже — вместе с пониманием колебательного характера разряда.

...Герц не только не помышлял о радиосвязи, но даже отрицал ее возможность.

...проблему передачи сигналов на расстояния пытался решить своим, отличным от Попова и Маркони, путем и Резерфорд. Однако, узнав в 1897 году о результатах Маркони, Резерфорд прекратил дальнейшие опыты в этой области и переключился на исследования радиоактивности.

...новый метод получения импульсных сверхсильных магнитных полей Капица предложил во время работы в Кавендишской лаборатории. Вот как описывал работу его установок знаменитый американский математик Норберт Винер: «...мощные генераторы... замыкались накоротко, создавая токи огромной силы, пропускавшиеся по массивным проводам; провода шипели и трещали, как рассерженные змеи, а в окружающем пространстве возникало магнитное поле колоссальной силы».

Что читать в «Кванте» о емкости и индуктивности

(публикации последних лет)

1. «Изобретатели радиотелеграфа» — 1987, № 2, с. 43;
2. «Генрих Герц и электромагнитные волны» — 1988, № 1, с. 48;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1988, № 8, с. 32;
4. «Переходные процессы в электрических цепях» — 1990, № 4, с. 64;
5. «Явление самоиндукции» — 1990, № 6, с. 63;
6. «Генератор незатухающих колебаний» — 1990, № 9, с. 44;
7. «Загадка лейденской банки» — 1991, № 11, с. 28.

Материал подготовил А. Леонович

Победители конкурса «Математика 6—8»

Мы публикуем результаты нашего второго конкурса «Математика 6—8», проводившегося в 1991—1992 гг. (№ 9 — № 4). Итоги конкурса подводились по письмам, полученным редакцией. Мы сожалеем о несвоевременной доставке журнала (не по нашей вине). Возможно, из-за этого многие наши читатели не смогли участвовать в конкурсе.

Каждая из 24 предложенных задач оценивалась в 10 очков. Числа, стоящие перед фамилиями победителей конкурса — количество набранных ими очков.

Призами журнала награждаются:

239 Щербицкая В.— Минск, с. ш. 53, 8 кл.,
236 Санников Ю.— Севастополь, с. ш. 8, 7 кл.,
227 Гуляев Л.— Н. Новгород, с. ш. 82, 7 кл.,
220 Бойко М.— Харьков, с. ш. 27, 8 кл.,
219 Мельник А.— Гайворон, с. ш. 2, 7 кл.,
218 Зайцев Г.— Москва, с. ш. 444, 8 кл.,
216 Русинковский В.— Чебоксары, с. ш. 20, 8 кл.,
215 Бондарева Л.— Львов, с. ш. 74, 8 кл.,
214 Барашков Д.— Жуковский, с. ш. 3, 8 кл.,
213 Математический кружок с. ш. 51 г. Киева, рук. Б. Н. Школьник,
208 Рязанова Э.— Курахово, с. ш. 1, 7 кл.,
206 Масальцев Д.— Харьков, с. ш. 27, 8 кл.,
206 Старобинская А.— Москва, с. ш. 38, 8 кл.,
198 Владышевский С., Павлишин М., Ховращук О.— Одесса, с. ш. 53, 8 кл.,
196 Кудинов А.— Минск, с. ш. 64, 6 кл.,
189 Плешачков А.— Жуковский, с. ш. 10, 7 кл.,
187 Кривошея А.— Винница, с. ш. 11, 6 кл.,
180 Кадочников П.— Псков, лицей, 8 кл.,
178 Бокий А.— Киев, с. ш. 98, 6 кл.,
177 Седых Ю.— Ангарск, с. ш. 10, 8 кл.,
176 Долганов П.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 8 кл.,
173 Пак К.— Душанбе, с. ш. 20, 8 кл.,
166 Зырянов Г.— Ташкент, с. ш. 91, 8 кл.,
165 Летита Т.— Стрый, с. ш. 10, 6 кл.

Жюри конкурса также отмечает успешное выступление на конкурсе следующих школьников:

156 Бакалейник Л.— Бар, с. ш. 2, 8 кл.,
151 Смирнова Е.— Дзержинск Нижегородской обл. с. ш. 11, 8 кл.,
150 Фейгенсон М.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 51, 6 кл.,
144 Безделин В.— Псков, лицей, 8 кл.,
139 Евсеев А.— Москва, с. ш. 1016, 3 кл.,
138 Сошников К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 6 кл.,
134 Петренко И.— п. Дружный Минской обл., с. ш. 1, 4 кл.,
130 Туровский А.— Баку, с. ш. 151, 7 кл.,
126 Хренков В.— Москва, с. ш. 550, 8 кл.,
123 Ногина О.— Челябинск, с. ш. 127, 8 кл.,
119 Рыкова О.— С. Петербург, с. ш. 517, 7 кл.,
114 Симунов С.— Жуковский, с. ш. 10, 7 кл.,
112 Щанов В.— Одесса, с. ш. 100, 8 кл.,
111 Шатунов С.— Киев, с. ш. 288, 6 кл.,
110 Гараев Р. и Гильфанова Р.— д. Илексаз, Татарстан, 7 кл.,
110 Кулик А.— Канев, с. ш. 4, 7 кл.,
109 Карпенков О.— Москва, с. ш. 444, 6 кл.,
109 Прохоров Д.— Минск, с. ш. 19, 8 кл.,
107 Евчик Т.— Пинск, с. ш. 4, 8 кл.,
106 Курманален Х.— Алма-Ата, с. ш. 90, 8 кл.,
105 Ханмагомедов — Дербент, с. ш. 19, 8 кл.,
103 Сенкевич О.— Иваново, с. ш. 22, 8 кл.,
100 Апальков Д.— Харьков, с. ш. 16, 8 кл.,
100 Ильичев А.— Реутов, с. ш. 3, 8 кл.,
100 Капля Е.— Капустин Яр, с. ш. 235, 8 кл.,
100 Минина Н.— Николаев, с. ш. 41, 8 кл.,
100 Окунева Е.— Арзамас, с. ш. 2, 7 кл.,
100 Полынский Н.— Миасс, с. ш. 10, 6 кл.,
100 Потапов Е.— Москва, с. ш. 633, 6 кл.

Предел последовательности

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Основные понятия и утверждения

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n. Совокупность чисел $\{a_n\}$, где $n=1,2, \ldots$, называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*; каждое число a_n называется *элементом или членом* этой последовательности, а n — его *номером*.

Числовая последовательность является частным случаем функции, а именно, последовательность представляет собой функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения во множестве действительных чисел.

Как задать числовую последовательность? Наиболее естественным является *аналитический* способ, указывающий в явном виде, какие действия нужно выполнить над числом n, чтобы получить общий член последовательности $a_n=f(n)$.

Примеры

1. Последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

имеет общий член $a_n=\frac{1}{n}$.

2. Последовательность

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

задается правилом $a_n=(-1)^{n+1}$ или же $a_n=\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Другим распространенным способом задания последовательности является *рекуррентный* способ. Он указывает, какие действия нужно произвести над уже вычисленными членами последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

чтобы получить следующий член — a_{n+1}; кроме того, должны быть заданы (смотря по характеру зависимости) несколько первых членов — так называемые начальные данные.

Примеры

1. Арифметическая прогрессия определяется рекуррентной зависимостью

$$a_{n+1}=a_n+d,\ n=1, 2, 3, \ldots$$

с начальным данным $a_1=a$.

Эта последовательность имеет вид

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d,\ \ldots$$

2. Последовательность Фибоначчи определяется условием

$$a_{n+1}=a_n+a_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

и начальными данными $a_1=1$, $a_2=1$.

Последовательность имеет вид

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Эту последовательность можно получить и в аналитической форме:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\},$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется

а) *ограниченной сверху*, если все ее члены меньше одного и того же числа M: $a_n<M$, $n=1, 2, 3, \ldots$

б) *ограниченной снизу*, если все ее члены больше одного и того же числа m: $a_n>m$, $n=1, 2, 3, \ldots$

в) *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу:

$$m<a_n<M,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

А теперь сформулируем наше основное определение.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число N, что для всех номеров $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ или $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Введем теперь последовательности, имеющие своим пределом бесконечность. Такие последовательности называются *бесконечно большими* и определяются следующим образом:

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа ε найдется такой номер N, что для всех $n\geqslant N$ выполняются неравенство $|a_n|>\varepsilon$.

Если последовательность такова, что $a_n>\varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, если же $a_n>-\varepsilon$, то употребляют обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$. Во всех случаях говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет *бесконечный* предел, равный $+\infty$ или $-\infty$.

В основе фактического вычисления пределов лежат следующие четыре теоремы.

Теорема 1. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, то последовательность $\{a_n+b_n\}$ также имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

Теорема 2. *При тех же предположениях последовательность $\{a_n-b_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b.$$

Теорема 3. *При тех же предположениях последовательность $\{a_nb_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=ab.$$

Теорема 4. *При тех же предположениях и дополнительном условии $b\neq0$ последовательность $\{a_n/b_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

Очень часто теорему 1 формулируют кратко: «Предел суммы равен сумме пределов» и записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n,$$

причем условия теоремы подразумеваются. Аналогичные замечания справедливы и по поводу теорем 2—4.

Доказательства всех четырех теорем более или менее аналогичны, поэтому мы докажем лишь теорему 1.

Доказательство. Нам дано, что при достаточно больших n отклонения $|a_n-a|$ и $|b_n-b|$ делаются сколь угодно малыми. Требуется доказать то же самое для отклонения

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|.$$

По свойству абсолютной величины имеем:

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| =$$
$$=|(a_n-a)+(b_n-b)| \leqslant |a_n-a|+|b_n-b|$$

Пусть задано некоторое число $\varepsilon>0$. Тогда можно подобрать такое N_1, что при $n>N_1$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и такое N_2, что при $n>N_2$

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В таком случае, обозначая через N наибольшее из чисел N_1 и N_2, будем иметь при $n>N$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь следующее определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для каждого $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $a_n \leqslant a_{n+1}$ (соответственно, неравенство $a_n \geqslant a_{n+1}$). Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Если все упомянутые неравенства являются строгими, то последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*). Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ убывает, последовательность $\{n\}$ возрастает, а последовательность $\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ не является монотонной.

В теории пределов очень важно следующее свойство действительных чисел, которое обычно принимают за аксиому.

Аксиома Больцано-Вейерштрасса. *Всякая неубывающая (невозрастающая) последовательность имеет предел — конечный, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный, равный $+\infty$ ($-\infty$), если она не ограничена сверху (соответственно снизу).*

В курсе математического анализа доказывается, что аксиома Больцано-Вейерштрасса равносильна каждому из следующих утверждений:

если на числовой оси построена бесконечная последовательность отрезков так, что каждый следующий отрезок лежит внутри предыдущего, то все отрезки имеют по крайней мере одну общую точку;

всякое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число.

Если одно из этих утверждений принять за аксиому, то второе утверждение и аксиома Больцано — Вейерштрасса станут теоремами, которые можно доказать.

Теорема 5. *Из всякой последовательности, содержащей бесконечное множество чисел, можно выбрать другую последовательность, стремящуюся к некоторому конечному или бесконечному пределу.*

Доказательство. Если в данной последовательности $\{a_n\}$ содержится лишь конечное множество чисел, не превосходящих a_1, то в ней обязательно будет бесконечное множество чисел, бо́льших a_1. Чтобы иметь дело с определенным случаем, мы предположим, что в нашей последовательности содержится бесконечное множество чисел, бо́льших a_1. Пусть одно из них a_{r_1}. Может случиться, что среди следующих за ним чисел найдется число $a_{r_2}>a_{r_1}$, среди следующих за a_{r_2} чисел найдется число $a_{r_3}>a_{r_2}$ и т. д. Если продолжать такой выбор чисел беспредельно, то из данной последовательности выделится последовательность, имеющая по аксиоме Больцано — Вейерштрасса конечный или бесконечный предел.

В противном случае встретится некоторое число a_{r_i}, которого не превзойдет ни одно из следующих за ним чисел; тем самым, выделится конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \ldots < a_{r_i}.$$

Среди чисел, следующих за a_{r_i}, снова будет, по предположению, бесконечное множество чисел, бо́льших a_1, но не превосходящих a_{r_i}. Начиная с одного из них, скажем a_{s_1}, составляем, подобно предыдущему, возрастающую последовательность, которая, как и первая, либо продолжится беспредельно (и тогда теорема будет доказана), либо оборвется на некотором числе a_{s_j}, которого ни одно из последующих чисел не превзойдет но само оно будет не больше a_{r_i}. Таким образом, получится новая конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \ldots < a_{s_j},\ a_{r_i} \geqslant a_{s_j}.$$

Продолжая далее таким же образом, мы получим ряд цепочек

$$\begin{gathered} a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \ldots < a_{r_i}, \\ a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \ldots < a_{s_j}, \\ a_1 < a_{t_1} < a_{t_2} < \ldots < a_{t_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

При этом мы либо дойдем до последовательности с бесконечным числом возрастающих членов (и теорема будет доказана), либо получим последовательность, состоящую из бесконечного множества невозрастающих членов

$$a_{r_i} \geqslant a_{s_j} \geqslant a_{t_k} \geqslant \ldots,$$

имеющую по аксиоме Больцано—Вейерштрасса конечный предел, так как все они больше a_1.

Теорема 6. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, обладающие следующими свойствами:*

1) если из $\{a_n\}$ выбрана подпоследовательность $\{a_{r_i}\}$, стремящаяся к пределу a, то подпоследовательность $\{b_{r_i}\}$ стремится к некоторому пределу b;

2) различным значениям пределов a соответствуют различные значения пределов b.

Тогда, если $\{b_n\}$ имеет определенный предел, то и $\{a_n\}$ также имеет определенный предел.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Действительно, если бы последовательность $\{a_n\}$ не имела определенного предела, то мы могли бы выделить из нее подпоследовательности, имеющие различные пределы a, которым соответствовали бы и различные значения b, что противоречит существованию определенного значения предела для $\{b_n\}$.

Теорема 7. *Если $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и $\{b_n\}$ — бесконечно возрастающая неограниченная последовательность, то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}, \qquad (1)$$

в предположении, что второй предел существует.

Доказательство. Обозначим через l предел, стоящий в правой части равенства (1). Тогда возможно найти такое число N, что при $n>N$ всегда

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Другими словами, все дроби

$$\frac{a_{N+1}-a_N}{b_{N+1}-b_N},\ \frac{a_{N+2}-a_{N+1}}{b_{N+2}-b_{N+1}},\ \ldots,\ \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

содержатся между $l-\frac{\varepsilon}{2}$ и $l+\frac{\varepsilon}{2}$. Вместе с тем, поскольку все знаменатели положительны, будем иметь

$$\left|\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем N достаточно большим для того, чтобы имело место не только последнее неравенство, но и неравенство $b_N>0$, что всегда возможно, потому что по условию $\{b_n\}$ бесконечно возрастает. На том же основании, при фиксированном N можно выбрать n таким, чтобы число $\frac{\varepsilon}{2}b_n$ превзошло абсолютную величину числа a_N-lb_N и затем при возрастании n постоянно оставалось бо́льшим последнего числа. Замечая теперь, что

$$\frac{a_n}{b_n}-l=$$
$$=\frac{a_N-lb_N}{b_n}+\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-l\right),$$

непосредственно находим, что

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon, \text{ т. е. } \lim\frac{a_n}{b_n}=l.$$

Следствие 1. *Если некоторая последовательность стремится к конечному пределу, то к тому же пределу стремится и среднее арифметическое и среднее геометрическое ее первых n членов.*

В самом деле, на основании последней теоремы мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad (2)$$

в предположении, что предел в правой части существует.

Ниже мы увидим (пример 3° следующего раздела), что

$$\lim_{n\to\infty}(\log_b a_n)=\log_b(\lim_{n\to\infty}a_n).$$

Считая это доказанным и заменяя в предыдущем равенстве a_n на $\log_b a_n$, получим

$$\lim_{n\to\infty}(\log_b\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}(\log_b a_n),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad (3)$$

в предположении, что предел в правой части равенства существует.

Следствие 2. *Если в некоторой последовательности $\{a_n\}$ отношение $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ стремится к некоторому конечному пределу, то к этому же пределу стремится и $\sqrt[n]{a_n}$.*

Действительно, стоит лишь заменить в равенстве (3) a_n на $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, чтобы получить

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right). \qquad (4)$$

Примеры вычисления пределов

1°. Пусть нам дано положительное число a и требуется найти предел a^n при возрастании n до бесконечности. При $a=1$ имеем всегда $a^n=1$. При $a<1$ имеем $a^n=a^{n-1}\cdot a<a^{n-1}$, т. е. последовательность $\{a^n\}$ монотонно убывает и поэтому, в силу аксиомы Больцано—Вейерштрасса должна стремиться к конечному пределу $l\geqslant 0$. Но из равенства $a^n=a^{n-1}\cdot a$ при переходе к пределу следует, что $l=la$, т. е. $(a-1)l=0$, откуда $l=0$. При $a>1$ имеем $a^n=a^{n-1}\cdot a>a^{n-1}$. Значит, последовательность $\{a_n\}$, монотонно возрастая вместе с n, должна стремиться к конечному или бесконечному пределу; но этот предел конечным быть не может, потому что он должен быть положительным числом l, а предыдущее равенство при переходе к пределу дает $l=la$, откуда $l=0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 \text{ при } a<1,\\ 1 \text{ при } a=1,\\ +\infty \text{ при } a>1.\end{cases}$$

2°. Допустим, что существует $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ и пусть b — некоторое заданное положительное число. Найдем предел последовательности $\{b^{a_n}\}$. Предположим сперва, что b меньше единицы и обозначим через α_n абсолютную величину a_n-a: $\alpha_n=|a_n-a|$. Если задано некоторое сколь угодно малое положительное число ε, то на основании предыдущего примера можно найти такое число m, чтобы $(1-\varepsilon)^m$ было меньше b. Не изменяя m, выберем теперь n таким, чтобы α_n было меньше $1/m$ и оставалось таким при дальнейшем возрастании n (это возможно, поскольку $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$).

Тогда будем иметь

$$1-b^{\alpha_n}<1-(1-\varepsilon)^{m\alpha_n}<1-(1-\varepsilon)=\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}b^{\alpha_n}=1,$$

и, значит, $\lim_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$, т. е. $\lim_{n\to\infty}b^{a_n}=$ $=b^{\lim_{n\to\infty}a_n}$.

При $b>1$ можно написать

$$\lim_{n\to\infty} b^{a_n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{-a_n}}=\frac{1}{b^{-a}}=b^a.$$

3°. Считая, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к пределу a, найдем предел последовательности $\{\log_b a_n\}$. Положим $\log_b a_n=c_n$. Тогда $a_n=b^{c_n}$. Если $\{c_n\}$ стремится к пределу c, то, согласно примеру 2°, последовательность $\{a_n\}$ стремится к пределу b^c. Поэтому (по теореме 6) справедливо и обратное — если существует предел $\{a_n\}$, то существует и предел $\{c_n\}$, причем

$$a=b^c,\quad c=\log_b a.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(\log_b a_n)=\log_b(\lim_{n\to\infty} a_n).$$

4°. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $a_n>0$ и $\{b_n\}$ стремятся соответственно к пределам a и b. Найдем предел последовательности $\{a_n^{b_n}\}$. Полагая $c_n=a_n^{b_n}$, имеем

$$\log_2 c_n=b_n\log_2 a_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\log_2 c_n=\log_2\lim_{n\to\infty} c_n=b\log_2 a=$$
$$=\log_2 a^b.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}=(\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

5°. Исследуем теперь последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Прежде всего, докажем некоторые неравенства. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — некоторые положительные числа, меньшие 1. Обозначим через $s_{n,r}$ сумму произведений из n первых чисел данной последовательности по r сомножителей в каждом:

$$s_{n,1}=x_1+x_2+\ldots+x_n,$$
$$s_{n,2}=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+\ldots+x_{n-1}x_n$$
$$s_{n,n}=x_1x_2x_3\ldots x_n.$$

Из правила умножения многочленов вытекает, что

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)=1-s_{n,1}+$$
$$+s_{n,2}-\ldots+(-1)^n s_{n,n}. \qquad (5)$$

Покажем, что всегда можно записать равенство

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)=$$
$$=1-s_{n,1}+s_{n,2}-\ldots+(-1)^r\Theta s_{n,r}, \qquad (6)$$

где Θ лежит между нулем и единицей. Иными словами, если в правой части равенства (5) опустить все члены, следующие за $s_{n,r}$ при данном r, то получим число, меньшее или большее, чем то, которое находится в левой части, в зависимости от того, будет ли r нечетным или четным. Воспользуемся методом математической индукции. Нам достаточно доказать, что равенство (6), очевидно справедливое при $n=r$, останется справедливым при замене $n\geqslant r$ на $n+1$, если оно выполняется при каком-нибудь n. Умножая обе части равенства (6) на $1-x_{n+1}$, получим

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{n+1})=$$
$$=1-s_{n,1}+s_{n,2}-\ldots+(-1)^r\Theta s_{n,r}-$$
$$-x_{n+1}+x_{n+1}s_{n,1}-\ldots+(-1)^{r-1}x_{n+1}\times$$
$$\times s_{n,r-1}+(-1)^r\Theta x_{n+1}s_{n,r}.$$

Замечая, что

$$s_{n+1,r}=s_{n,r}+x_{n+1}s_{n,r-1},$$

находим

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{n+1})=$$
$$=1-s_{n+1,1}+s_{n+1,2}-\ldots+(-1)^{r-1}\times$$
$$\times s_{n+1,r-1}+(-1)^r(x_{n+1}s_{n,r-1}+\Theta(1-$$
$$-x_{n+1})s_{n,r}).$$

Величина в скобках, очевидно, положительна и не превосходит

$$x_{n+1}s_{n,r-1}+(1-x_{n+1})s_{n,r}=$$
$$=s_{n+1,r}-x_{n+1}s_{n,r}<s_{n+1,r}.$$

Поэтому ее можно представить в виде $\theta' s_{n+1,r}$, где θ' лежит между нулем и единицей, что и требовалось доказать.

В частности, из формулы (6) при $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$ и $r=1$ следует, что

$$(1-x)^n>1-nx, \qquad (7)$$

поскольку в этом случае $s_{n,1}=nx$.

Воспользуемся теперь формулами

(6) и (7) для анализа последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Из формулы (7) при $x=\frac{1}{n^2}$ вытекает, что

$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}$, т. е.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}.$$

Замечая, далее, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \qquad (8)$$

получаем

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=a_{n-1}.$$

Стало быть, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает. Но по той же формуле (6)

$$(1-x)^n>1-\frac{n}{1}x+$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$

и, в частности, при $x=\frac{1}{n}$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>\frac{n^2-1}{3n^2}=$$
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

А отсюда с помощью равенства (8) находим, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>\frac{1}{3},\ \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<3.$$

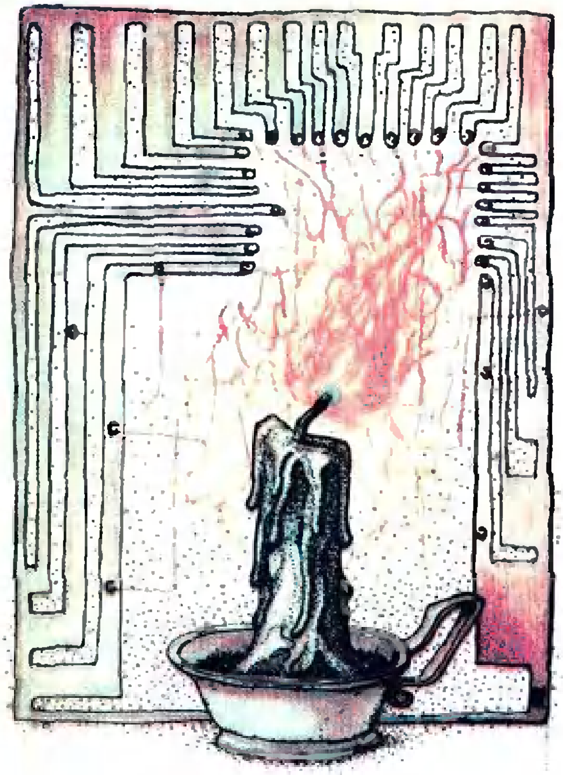
Таким образом, мы видим, что члены $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастая вместе с n, не могут превзойти числа 3. Поэтому последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к конечному пределу. Этот предел обозначают через e. В курсах математического анализа доказывается, что число e иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Справедливо приближенное равенство

$$e\approx 2{,}718281828459045.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите следующие пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{n+2}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;
8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;
9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;
10. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{4}{3}}-(n^2-1)^{\frac{2}{3}}\right)$.



Лаборатория „Кванта"

Электрическое действие пламени

Кандидат физико-математических наук
В. КОЗЛОВСКИЙ

В одном из экспериментов, проведенных известнейшим физиком девятнадцатого столетия У. Томсоном (лордом Кельвином), было обнаружено, что помещенная в электрическое поле горящая спиртовка приобретает электрический заряд*). Во время опыта спиртовка помещалась на изолирующую подставку, укрепленную на медной пластинке. Над спиртовкой располагалась цинковая труба, в которую направлялось пламя. Когда труба и пластинка соединялись проводником, спиртовка приобретала положительный потенциал. Если же пластинка и труба изготавливались из одного металла, электризации спиртовки не происходило.

Наблюдаемый эффект Томсон объяснял так. Контакт разнородных металлов обусловливает появление электрического поля. Под действием этого поля происходит некоторое смещение положительных и отрицательных зарядов внутри спиртовки. В результате поднимающаяся струя горячего воздуха уносит заряд одного знака, а сама спиртовка оказывается носителем заряда противоположного знака.

Этот опыт легко воспроизвести, например в школьном физическом кабинете. Для простоты пластинку и трубу можно сделать из одного материала, а для создания разности потенциалов использовать батарею (рис. 1). Но прежде чем начать экспериментировать, давайте рассчитаем, какой потенциал приобретет спиртовка. Это сделать нетрудно, если спиртовку представить проводящим шариком. Поскольку поле практически не проникает в глубь проводящего цилиндра, нижний срез цилиндра можно считать эквипотенциальной плоскостью, потенциал которой равен потенциалу цилиндра. Таким образом, спиртовка оказывается в почти однородном поле, образованном плоскостями, находящимися под напряжением батареи.

На поверхности спиртовки появляется заряд, плотность которого изме-

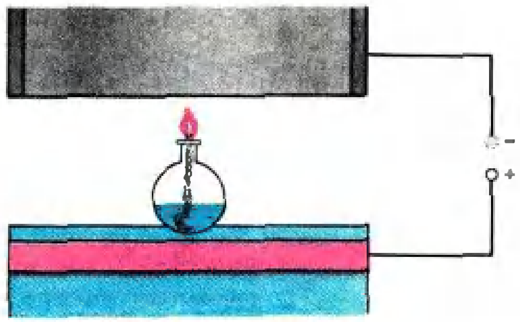


Рис. 1.

*) W. Thomson. Reprint of papers on electrostatics and magnetism. London. Macmillan. 1872.

няется с широтой (угол $\pi/2-\theta$ на рисунке 2; направление внешнего поля принимается за полярную ось). Для расчета величины плотности заряда примем, что нейтральный шарик содержит однородные объемные заряды одной и той же величины, но противоположных знаков. Центры шариков смещаются во внешнем поле в противоположных направлениях на одно и то же микроскопическое расстояние, что приводит к появлению заряда на поверхности, где нет их взаимной компенсации. Пламя будем считать небольшим по размерам и почти не искажающим внешнее поле.

Воспользуемся тем, что однородно заряженный с объемной плотностью ϱ шар создает внутри себя в точке на расстоянии r от центра поле напряженностью

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_r}{r^2}=\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Это поле всего заряда, расположенного внутри сферы радиусом r, в то время как сферические слои бо́льшего радиуса здесь поля не создают. В зависимости от знака ϱ электрическое поле направлено от центра шара ($\varrho>0$) или к центру ($\varrho<0$).

Рассмотрим небольшую кольцевую площадку ΔS на поверхности сферы, ограниченную двумя окружностями, соответствующими углам θ и $\theta+\Delta\theta$. Когда центр сферы O переходит в новое положение O', площадка прочерчивает скошенный цилиндр, объем которого

$$\Delta V=\Delta S\cdot OO'\cos\theta.$$

Если содержащийся в этом цилиндре заряд $\varrho\Delta V$ мы разделим на площадь основания ΔS, получим поверхностную плотность

$$\sigma=\varrho\cdot OO'\cos\theta.$$

Величину перемещения OO' определим из условия отсутствия поля внутри проводника (рис. 3). Напряженность собственного поля в некоторой точке M складывается из напряженностей полей каждого из двух противоположно заряженных шаров. Концы векторов слагаемых полей и равнодействующего поля обозначим K, L и R соответственно. В треугольниках MOO' и KRM углы RKM и OMO' равны, а образующие их стороны пропорциональны, значит, эти треугольники подобны. Из подобия следует, что равнодействующее поле параллельно линии центров сфер, а его величина равна

$$\frac{E\cdot OO'}{r}=\frac{\varrho\cdot OO'}{3\varepsilon_0}.$$

Таким образом, собственное поле одинаково для всех точек проводящего шара и может всюду компенсировать однородное внешнее поле E_0. Отсюда находим плотность наведенного заряда в зависимости от напряженности внешнего поля:

$$E_R=E_0\Rightarrow\varrho=\frac{3\varepsilon_0E_0}{OO'}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sigma=\varrho\cdot OO'\cos\theta=3\varepsilon_0E_0\cos\theta.$$

Продолжим наши рассуждения. Пламя располагается в верхнем полюсе сферы ($\theta=0$), где плотность наведенного заряда имеет максимальное значение. По мере горения с шара стекает заряд одного знака и на шаре накапливается заряд противоположного знака. Этот заряд — обозначим его q — распределяется по поверхности шара — радиусом a — с постоянной плотностью

$$\sigma'=\frac{q}{4\pi a^2},$$

поскольку поле внутри шара должно отсутствовать. Нарастание плотности

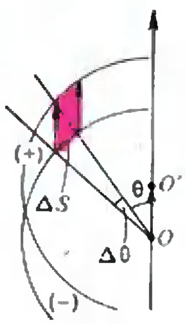


Рис. 2.

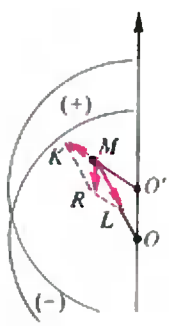


Рис. 3.

σ' прекращается, когда полюс становится нейтральным, что происходит при величине заряда шара

$$q'_m = 4\pi a^2 \sigma_m = 12\pi\varepsilon_0 a^2 E_0.$$

Этому максимальному заряду соответствует потенциал изолированного шара

$$U'_m = \frac{q'_m}{4\pi\varepsilon_0 a} = 3aE_0.$$

Напряженность внешнего поля определяется напряжением батареи U и расстоянием l между пластинкой и основанием трубы*):

$$E_0 = \frac{U}{l}.$$

Окончательно

$$U'_m = \frac{3aU}{l}.$$

В заключение заметим, что этот опыт можно модифицировать. Так, одним из вариантов является постепенная нейтрализация предварительно заряженного шара вследствие уноса заряда пламенем. Пример из жизни — открытый огонь на поверхности земли (скажем, от горения нефтяных скважин) приводит к переносу заряда с поверхности в атмосферу, что влияет на образование осадков.

*) Внешнее поле в отсутствие шара может быть принято однородным и остается таковым при внесении шара, если расстояние между «обкладками» существенно превышает его размеры.

Зачем нужна статистика?

(Начало см. на с. 20)

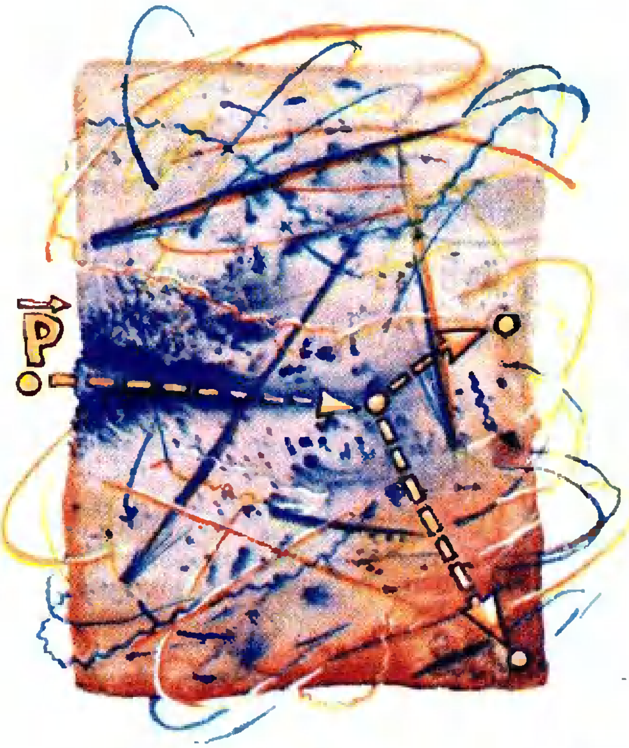
кладная на сумму менее чем в 5 фунтов стерлингов. Проверка каждой накладной может потребовать сравнения ее с общей ведомостью поставок, и на это уходит в среднем около двух минут. Таким образом, на проверку всех 5123 накладных потребовалось бы примерно 170 человеко-часов. С учетом накладных расходов затраты составили бы сотни фунтов. Такой контроль вряд ли был бы экономически оправдан. Если же сделать выборку, скажем, 50 накладных, стоимость их проверки составила бы примерно 1 % стоимости полной проверки. Если все оказывается в порядке или обнаруживается лишь небольшое число незначительных ошибок, то все 5123 накладных следует оплатить. Если в выборке обнаруживаются существенные ошибки, то, вероятно, лучше заплатить за проверку всех накладных. Здесь есть над чем подумать статистику! Например, насколько велики должны быть ошибки, чтобы можно было принять решение о проверке всех накладных? Статистик может также дать они могут оказаться нетипичным набором, подготовленным возможно, неопытным клерком, выполняющим работу вместо более компетентного больного сотрудника.

В идеале нужно произвести *случайную выборку*, когда любая насовет, как произвести выборку: вряд ли рекомендуется брать последовательно 50 накладных в том порядке, как их получила фирма, поскольку кладная может попасть в данную выборку с равной вероятностью. Были разработаны различные приемы получения случайных или эффективно случайных выборок. Существуют, в частности, компьютеры, которые на основе эффективно случайных выборок определяют выигрышные комбинации чисел в лотереях.

Мы совершили краткий экскурс в мир статистики. Многих важных тем и практических применений мы не касались. Например, влияния компьютеров на характер и способ решения задач.

В заключение предлагаем поразмыслить над тем, как поставить эксперимент, чтобы выяснить, есть ли какое-либо статистическое доказательство, что 13 является, как это часто считается, числом несчастливым, или оно — число счастливое.

Перевод с английского А. Якубова



Практикум абитуриента

Законы сохранения в релятивистской динамике

А. КОРЖУЕВ

Некоторое время тому назад в программе по физике для поступающих в вузы появился новый раздел — «Элементы теории относительности». Так что теперь на вступительном экзамене вам могут встретиться задачи и на эту тему.

Рассмотрим несколько конкретных задач на движение тел с так называемыми релятивистскими скоростями, т. е. со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Для их решения нам понадобятся хорошо известные в классической механике законы сохранения импульса и энергии, но записанные в специальной форме.

Так, релятивистский импульс тела с массой покоя m_0, движущегося со скоростью v, вычисляется по формуле

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а полная энергия —

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где c — скорость света. Заметим, что эти формулы справедливы лишь для частиц с отличной от нуля массой покоя. А, например, для фотона — частицы, движущейся со скоростью c и имеющей нулевую массу покоя, энергия записывается в виде

$$E=h\nu,$$

а импульс —

$$p=\frac{h\nu}{c},$$

где $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, ν — частота излучения.

А теперь — задачи.

Задача 1. *При аннигиляции медленно движущихся электрона и позитрона образуются два гамма-кванта. Под каким углом друг к другу они разлетаются? Какова частота возникшего излучения?*

В рассматриваемом процессе

$$^{\ 1}_{\ 0}p+\,^{-1}_{\ \ 0}e\rightarrow2\gamma$$

выполняются законы сохранения импульса и энергии. Поскольку начальные скорости частиц малы, по закону сохранения импульса получим

$$0=\frac{h\nu_1}{c}-\frac{h\nu_2}{c},$$

т. е.

$$\nu_1=\nu_2.$$

При этом очевидно, что угол разлета равен 180° (рис. 1), ибо только в этом случае суммарный импульс частиц после взаимодействия может быть равным нулю.

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$2m_0c^2=h\nu_1+h\nu_2,$$

откуда, учитывая, что $\nu_1=\nu_2=\nu$,

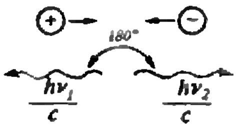


Рис. 1.

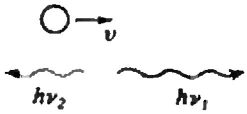


Рис. 2.

найдем

$$\nu=\frac{m_0c^2}{h}.$$

З а д а ч а 2. *Летевшая со скоростью $v=0{,}8\,c$ нейтральная частица распадается на два фотона, движущихся затем в противоположных направлениях (рис. 2). Каково отношение частот этих квантов?*

Вновь применим законы сохранения импульса и энергии.

Согласно закону сохранения импульса, начальный импульс частицы равен сумме проекций импульсов фотонов на первоначальное направление движения частицы:

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{h\nu_1}{c}-\frac{h\nu_2}{c},$$

а по закону сохранения энергии полная энергия частицы равна суммарной энергии квантов:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=h\nu_1+h\nu_2.$$

Подставляя сюда значение скорости $v=0{,}8\ c$ и умножая обе части первого уравнения на c, получим

$$\frac{4}{3}m_0c^2=h\nu_1-h\nu_2,$$

$$\frac{5}{3}m_0c^2=h\nu_1+h\nu_2.$$

Вычитая и складывая полученные уравнения, найдем частоты излучений:

$$\nu_1=\frac{3m_0c^2}{2h},\quad \nu_2=\frac{m_0c^2}{6h}$$

и искомое отношение:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2}=9.$$

З а д а ч а 3. *При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, движущихся под углами $\alpha_1=30°$ и $\alpha_2=60°$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова была ее скорость?*

В этом случае закон сохранения импульса необходимо записать в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси (рис. 3):

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{h\nu_1}{c}\cos\alpha_1+\frac{h\nu_2}{c}\cos\alpha_2, \quad (1)$$

$$0=\frac{h\nu_1}{c}\sin\alpha_1-\frac{h\nu_2}{c}\sin\alpha_2. \quad (2)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=h\nu_1+h\nu_2. \quad (3)$$

Из уравнения (2) с учетом того, что $\sin\alpha_1=1/2$ и $\sin\alpha_2=\sqrt{3}/2$, получим

$$\nu_1=\nu_2\sqrt{3}.$$

Подставим этот результат в уравнения (1) и (3):

$$\frac{m_0vc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=2h\nu_2,\ \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=h\nu_2(\sqrt{3}+1)\ .$$

Теперь разделим полученные равенства одно на другое и найдем

$$\frac{c}{v}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Окончательно

$$v=\frac{2c}{\sqrt{3}+1}\approx 0{,}73\ c.$$

З а д а ч а 4. *Частица, двигавшаяся первоначально со скоростью $v=0{,}8\ c$, распадается на два фотона. Найдите минимальный угол разлета этих фотонов.*

Применив законы сохранения энергии и импульса, получим (рис. 4)

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=h\nu_1+h\nu_2,$$

$$\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2=\left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2+\left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2-$$

$$-\frac{2h^2\nu_1\nu_2\cos\beta}{c^2},\ \text{где}\ \beta=180°-\alpha.$$

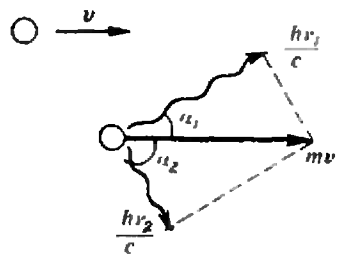


Рис. 3.

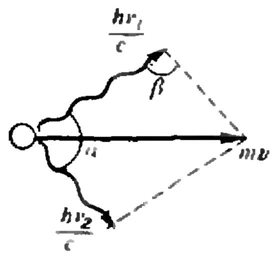


Рис. 4.

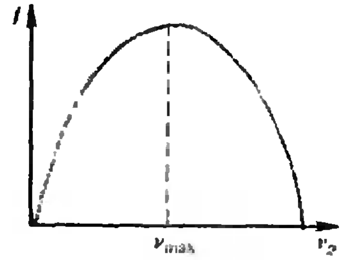


Рис. 5.

Подставим сюда $v=0{,}8\ c$ и умножим второе равенство на c:

$$\frac{5}{3}m_0c^2=h\nu_1+h\nu_2,$$

$$\frac{16}{9}m_0^2c^4=(h\nu_1)^2+(h\nu_2)^2+2h^2\nu_1\nu_2\cos\alpha.$$

Выделим во втором уравнении полный квадрат:

$$\frac{16}{9}m_0^2c^4=(h\nu_1+h\nu_2)^2-$$
$$-2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha).$$

Так как сумма энергий фотонов постоянна и равна $5/3\ m_0c^2$, то

$$2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha)=m_0^2c^4,$$

т. е.

$$1-\cos\alpha=\frac{m_0^2c^4}{2h^2\nu_1\nu_2}.$$

Чтобы угол разлета α, а значит, и разность $1-\cos\alpha$ были минимальными, произведение $\nu_1\nu_2$ должно быть максимальным. Как известно из математики, произведение двух чисел, сумма которых постоянна (ибо $h\nu_1+h\nu_2=5/3m_0c^2$), будет максимальным, когда сомножители равны: $\nu_1=\nu_2$. Это же можно доказать более строго. Запишем произведение $\nu_1\nu_2$, а точнее $h\nu_1h\nu_2$, в виде $(5/3m_0c^2-h\nu_2)h\nu_2$ и исследуем на максимум функцию

$$f(\nu_2)=\left(\frac{5}{3}m_0c^2-h\nu_2\right)h\nu_2=$$
$$=\frac{5}{3}m_0c^2h\nu_2-h^2\nu_2^2.$$

Ее графиком будет парабола (рис. 5), которая достигает максимума в точке

$$\nu_2=\frac{5}{6}\frac{m_0c^2}{h}.$$

Тогда

$$h\nu_1=\frac{5}{3}m_0c^2-\frac{5}{6}m_0c^2=\frac{5}{6}m_0c^2,$$

а искомое произведение

$$\nu_1\nu_2=\frac{25}{36}\frac{m_0^2c^4}{h^2}.$$

Подставляя этот результат в выражение для разности $1-\cos\alpha$, получим

$$1-\cos\alpha_{min}=\frac{18}{25}=0{,}72,$$

откуда

$$\alpha_{min}=\arccos 0{,}28\approx 47°.$$

Задача 5. *Может ли свободный электрон поглотить фотон?*

Опять воспользуемся законами сохранения импульса и энергии. Пусть электрон до поглощения фотона покоился, а затем приобрел скорость v. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$m_0c^2+h\nu=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а согласно закону сохранения импульса,

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Найдя $h\nu$ из второго уравнения и подставив его в первое, получим

$$m_0c^2+\frac{m_0vc}{\sqrt{1-v^2/c}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

После преобразований придем к уравнению

$$(c-v)^2=c^2-v^2.$$

Формальными его решениями являются значения скорости $v=c$ и $v=0$. Другими словами, скорость электрона должна быть равна либо скорости света c, что невозможно, либо нулю, что не имеет физического смысла, поскольку в этом случае частота фотона оказывается равной нулю.

Теперь попробуйте решить несколько подобных задач самостоятельно.

Упражнения

1. Докажите, что покоящийся свободный электрон не может излучить фотон.

2. При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, двигавшиеся под углами $\alpha=60^\circ$ и $\beta=90^\circ$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова ее первоначальная скорость?

3. Частота фотона, налетающего на покоящийся электрон, ν_1, скорость электрона после взаимодействия 0,6 c. На сколько изменилась частота фотона и каков его угол рассеяния?

Вычисления в тригонометрии

Как и в прошлом номере, предлагаем вам для самостоятельного решения задачи, но на этот раз по тригонометрии.

Найдите значения выражений:

1. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

2. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$. 3. $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$.

4. $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

5. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}$.

6. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$.

7. $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}$.

8. $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}$.

9. $\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ$.

10. $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$. 11. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ$.

12. $\operatorname{ctg}10^\circ\operatorname{ctg}50^\circ\operatorname{ctg}70^\circ$.

13. $\dfrac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}$.

14. $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

15. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}$. 16. $8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$.

17. $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$.

18. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt3}{\cos 10^\circ}$. 19. $\cos 36^\circ-\sin 18^\circ$.

20. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

21. $\sin 20^\circ\cos 50^\circ\sin 60^\circ\cos 10^\circ$.

22. $\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$.

23. $\dfrac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 27^\circ}$.

24. $\dfrac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 69^\circ\cos 9^\circ+\cos 81^\circ\cos 21^\circ}$.

25. $\dfrac{\cos 67^\circ\cos 7^\circ-\cos 83^\circ\cos 23^\circ}{\cos 128^\circ\cos 68^\circ-\cos 38^\circ\cos 22^\circ}-\operatorname{tg}164^\circ$.

26. $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ+\cos 157^\circ\cos 97^\circ}$.

27. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$.

28. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}$.

29. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\times\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ$.

30. $\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\times\sin 70^\circ\sin 80^\circ$.

31. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\times\cos\frac{7\pi}{15}$.

32. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\times\operatorname{ctg}80^\circ$.

33. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$.

34. $\cos 67^\circ30'$. 35. $\cos 75^\circ$.

36. $\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ$.

37. $\dfrac{96\sin 80^\circ+\sin 65^\circ\sin 35^\circ}{\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 110^\circ}$.

38. $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ$.

39. $\dfrac{\operatorname{ctg}15^\circ+1}{2\operatorname{ctg}15^\circ}$.

40. $\sin 160^\circ\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cos 340^\circ+\operatorname{tg}110^\circ\operatorname{tg}340^\circ$.

41. $96\sqrt3\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

42. $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{6\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha,\quad \alpha=\frac{3\pi}{16}$.

43. $\dfrac{\sin 110^\circ\sin 250^\circ+\cos 540^\circ\cos 290^\circ\cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}$.

44. $\dfrac{1}{\cos 290^\circ}+\dfrac{1}{\sqrt3\cos 250^\circ}$.

45. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

46. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$. 47. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

Публикацию подготовил Б. Рудой

Аномальные флексагоны

И. КАН

Одной из наиболее интересных и удивительных головоломок XX века является флексагон. Его нетрудно изготовить из бумаги при помощи клея и ножниц следующим образом.

Возьмите бумажную ленту шириной 3—5 см и такой длины, чтобы ее можно было разделить на 37 равносторонних треугольников, которые в дальнейшем для краткости будем именовать секторами. Заполните ленту числами, как на рисунке 1. Теперь согните ленту по линиям *A—A*, *B—B*,... ..., *K—K*, накладывая «*» на «11»; «12»; и «12»; «7» на «7» и т. д.— одинаковые числа одно на другое. После сгиба по линии *K—K* длина ленты сократится уже почти вдвое. Продолжайте сгибать ленту, закрывая одинаковые числа: «6»—«6», «5»—«5», «4»—«4» и т. д. Осталась лента из 10 секторов. Чтобы свернуть ее в шестиугольник (а именно такую форму имеет флексагон), согните ленту еще три раза, каждый раз закрывая пару соседних двоек. Теперь тот конец ленты, который помечен числом «11», всуньте в другой конец, который имеет число «11» внутри, так, чтобы совместились друг с другом, во-первых, числа «11», а во-вторых, две «звездочки». Осталось склеить «звездочки», и флексагон готов (рис. 2).

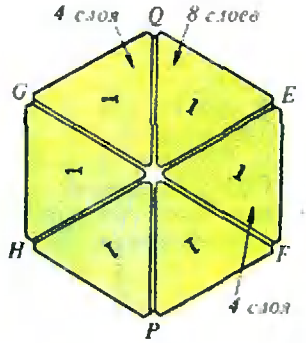


Рис. 2. Исходное положение флексагона.

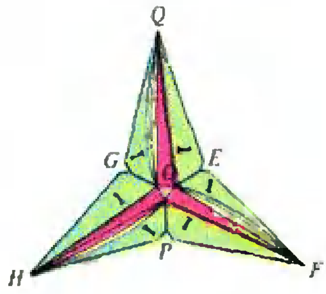


Рис. 3. Позиция «пропеллер».

Первое удивительное свойство флексагона состоит в том, что путем перегибаний от «единиц» наверху и «троек», которые сейчас на другой стороне флексагона, можно перейти к «двойкам». Для этого согните флексагон по линиям *OQ*, *OF*, *OH* (см. рис. 2) от себя, так чтобы точки *E*, *G*, *P* удалялись. Пусть эти точки сомкнутся в одну, тогда получится нечто похожее на трехлопастный пропеллер (рис. 3). Раскройте полученную фигуру спереди. Теперь на лицевой стороне флексагона оказываются «двойки», а на тыльной «единицы».

В качестве начального положения флексагона выберем такое, как на рисунке 2: на лицевой стороне — шесть «единиц», на обратной (тыльной) стороне — шесть «троек», причем под сектором *QOE* с «единицей» (заметьте, что это правый из двух верхних секторов *GOQ* и *QOE*) находится еще 7 слоев, а под соседними секторами — меньше (по 3 слоя).

Операцию, состоящую из последовательности всех сгибов, при помощи которых мы перешли от «единиц» и «троек» к

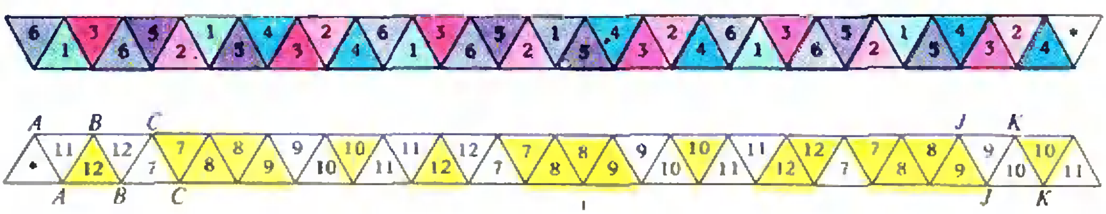


Рис. 1. Разметка и раскраска развертки флексагона.

«двойкам», обозначим через V. Необходимо следить за тем, чтобы при ее выполнении флексагон не поворачивался (иначе это приведет к путанице). Так, после применения V к начальному положению должен получиться флексагон, в котором большее количество слоев бумаги находится уже под левым из двух верхних секторов. Операцию, обратную к V (т. е. такую, что последовательное выполнение V и V^{-1} оставляет флексагон без изменений), естественно обозначить V^{-1}.

Совокупность шести чисел, которые одновременно раскрываются при выполнении операции V, называется плоскостью. Плоскости с числами «1», «2», «3» нами уже получены. Подумайте, как получить плоскости с числами от «4» до «12».

Если вы уже накопили некоторый опыт в «перелистывании» плоскостей, то наверняка удивитесь, узнав, что есть плоскости, помеченные сразу несколькими числами. Это и есть аномальные положения флексагона. К ним можно прийти следующим образом.

Операции U, W. Пусть флексагон находится в начальном положении (рис. 2). Согните его по линии PQ от себя. При этом «тройки» закрываются, а вершины G и E, H и F совмещаются попарно. Раскройте флексагон спереди, так чтобы получилась «лодочка» (рис. 4). Два верхних сектора, помеченных «двойками», опустите в середину, на две «тройки». Получится «корзинка» (рис. 5). Сложите «корзинку» пополам, накладывая «шестерку» на «шестерку» и «единицу» на «единицу». Раздвиньте вверху «лопасти», раскрывая «пятерки». Получается «перевернутый пропеллер» (рис. 3, «вверх ногами»). Если теперь этот «пропеллер» вы раскроете спереди, то тем самым закончите выполнение операции W (рис. 6), а если сзади — то будет выполнена операция U (рис. 7).

Две следующие операции носят тривиальный характер:

T — это поворот флексагона в его плоскости на 60° против часовой стрелки; Π — это поворот флексагона в пространстве на 180° относительно его вертикальной оси симметрии PQ.

Теперь вы можете начать самостоятельные эксперименты с флексагоном. Рекомендуется записывать все выполненные операции, чтобы иметь возможность вернуться обратно от любого положения, к которому вы пришли. При работе с флексагоном вам пригодится следующее правило устранения аномалий (не являющееся, однако, алгоритмом): в любом аномальном положении следует искать те операции, которые как можно большее количество раз совмещают друг с другом секторá, помеченные одним и тем же числом. Так, в положении, изображенном на рисунке 7, наиболее целесообразно выполнить операцию U^{-1}, совмещающую сектора с «пятерками» (заметьте, что если операции U^{-1} и $\Pi U \Pi$ одновременно применимы в данном положении, то результат их выполнения — один и тот же).

После некоторого количества экспериментов вы обнаружите, что наибольшую трудность представ-

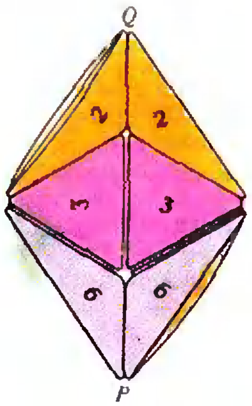


Рис. 4. Позиция «лодочка».

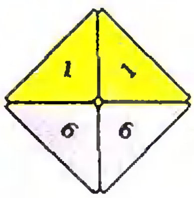


Рис. 5. Позиция «корзинка».

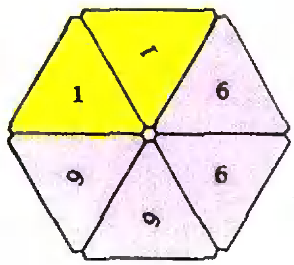


Рис. 6. Результат операции W.

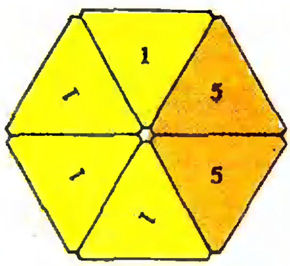


Рис. 7. Результат операции U.

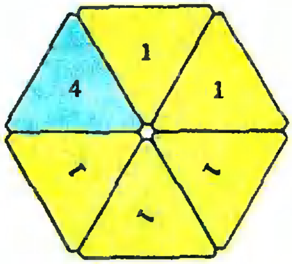


Рис. 8. Положение типа «5» — «1».

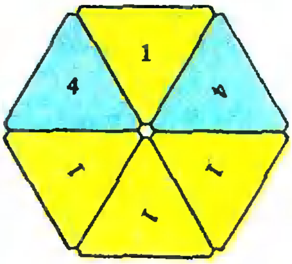


Рис. 9. Положение типа «4» — «2».

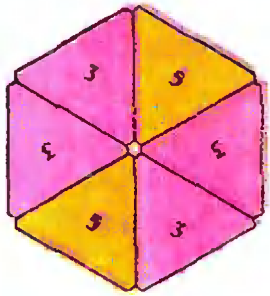
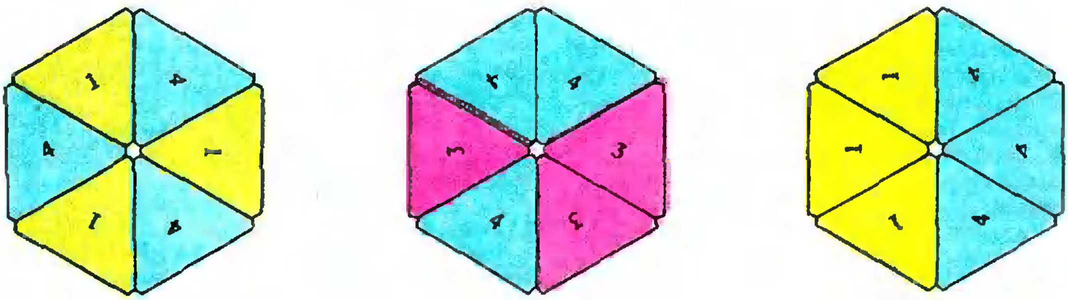


Рис. 10. Второй вариант положения типа «4» — «2».



а) б) в)

Рис. 11. Положения типа «3» — «3».

ляют собой такие аномалии, когда на одной из плоскостей только одно число отличается от остальных пяти чисел (такие аномалии назовем положениями типа «5»—«1»). К такой ситуации приводит, например, следующая последовательность операций, примененная к начальному положению: $TWUW^{-1}$ (рис. 8).

В флексагоне, который получился, не все плоскости аномальны, в чем легко убедиться, «перелистав» его с помощью преобразования V: плоскости, помеченные числами «5» и «8», присутствуют здесь в своем обычном виде. Постарайтесь обнаружить и другие положения типа «5»—«1», существенно (как именно?) отличающиеся от только что приведенного. Эти аномалии интересны тем, что последовательности операций для их устранения играют ключевую роль в алгоритме устранения любых аномалий (известном автору, но не приведенном здесь из-за недостатка места).

Рассмотрим теперь аномалии типа «4»—«2», т. е. когда в аномальном флексагоне на некоторой плоскости только два совпадающих числа отличаются от остальных четырех, также совпадающих. Две из таких аномалий даны на рисунках 6 и 7. Еще одна получится, если к начальному положению применить последовательность операций $T(WUW^{-1}T^2)^2$ (рис. 9). Положение на рисунке 10, также типа «4»—«2», попытайтесь получить самостоятельно.

Следующее положение (рис. 11, *а*) получается из начального по уже очевидной формуле $T(WUW^{-1}T^2)^3$, а положение на рисунке 11, *б* по формуле $V^2TW^{-2}\Pi W^{-1}\times$ $\times \Pi T^2W^{-1}V^{-1}$. На рисунке 11, *в* представлено еще одно положение типа «3»—«3», оставленное в качестве упражнения.

Какие еще интересные аномалии вам удастся получить? Признаюсь, мне не известен ответ на вопрос: можно ли на двух внешних плоскостях флексагона получить одновременно 12 различных чисел (если флексагон имеет 12 плоскостей)?

Олимпиады

XVIII Всероссийская олимпиада по математике и физике

С окончанием весенних школьных каникул завершилась и XVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике, физике и химии, заключительный, четвертый этап которой проходил в этом году с 22 по 29 марта в Костроме, Нижнем Новгороде, Курске и Омске.

Общими организационными вопросами проведения Всероссийской олимпиады ведает ее Центральный оргкомитет, созданный Министерством образования Российской Федерации. В него вошли специалисты Министерства, видные ученые, преподаватели вузов и учителя-методисты. Подготовкой рекомендуемых конкурсных заданий четвертого этапа (как и третьего, областного) занимаются предметно-методические комиссии, образованные Оргкомитетом. Активное участие в их работе принимают студенты и аспиранты московских вузов.

Заключительный этап Всероссийской олимпиады проводится в четырех зонах: Северо-Западной, Центральной, Юго-Западной и зоне Сибири и Дальнего Востока. Каждая из них включает в себя около 20 территорий — областей, краев, республик,— и каждая из этих территорий посылает на четвертый этап олимпиады по одному победителю третьего этапа среди школьников 9, 10 и 11 классов. Кроме того, по персональным приглашениям в заключительном этапе участвуют победители конкурса «Задачник «Кванта», а также те участники заключительного тура предыдущей Всероссийской олимпиады и предыдущей Межреспубликанской олимпиады, которые были награждены дипломами I и II степени.

В каждом городе, где проходит заключительный этап Всероссийской олимпиады, для его проведения создаются оргкомитеты и жюри, в которые входят специалисты органов народного образования, преподаватели вузов, учителя, студенты и аспиранты. Со своей стороны, Центральный оргкомитет командирует своих представителей для работы в составе жюри олимпиады, для осуществления координации и обеспечения единства требований.

Каждый участник заключительного этапа олимпиады может познакомиться с результатами оценки его работы и обсудить возникшие вопросы с членами жюри.

Участники заключительного этапа, занявшие первые четыре места в своей возрастной группе (среди 9, 10 или 11 классов), а также обладатели дипломов I и II степени предыдущей Межреспубликанской олимпиады (которые участвуют в последнем этапе Всероссийской олимпиады вне конкурса), составляют команду своей зоны на предстоящую Межреспубликанскую олимпиаду. Кроме того, учащиеся 11-х классов, показавшие хорошие результаты на заключительном этапе, получают приглашения и рекомендации для поступления в Московский физико-технический институт.

Математика

Как обычно, состязания проводились в два дня, каждый день участникам предлагалось по 4 задачи. После формулировки задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^3-5\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{6}{y}, \\ y^3-5\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{6}{x}. \end{cases} \qquad (5)$$

2. Двое игроков по очереди ставят фишки на клетки доски 99×99. Игрок может ставить фишку на свободную клетку, если все соседние клетки свободны или если хотя бы на одну из соседних клеток уже поставил фишку соперник (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре? (7)

3. Окружность, вписанная в дельтоид $ABCD$ ($AB=BC$, $CD=AD$), касается его сторон AB, BC и AD в точках K, M и N соответственно. Диагональ AC пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что точки A, K, P и N лежат на одной окружности. (7)

4. План города имеет вид квадрата со стороной $(n-1)$, расчерченного на $(n-1)^2$ единичных квадратиков. Нужно открыть несколько автобусных (двусторонних) маршрутов так, чтобы каждый маршрут имел не более одного поворота и чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать, сделав не более одной пересадки. Каким наименьшим числом маршрутов можно обойтись? (9)

Второй день

5. Из шахматной доски вырезали

а) клетку $b2$,

б) клетки $b2$ и $g2$.

Можно ли, начав путь из клетки $c2$, обойти фишкой всю доску, побывав на каждой клетке по одному разу, если фишка каждым ходом передвигается в соседнюю клетку (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону)? а) (1); б) (5).

6. Решите в простых числах уравнение

$$2^{x+1}+y^2=z^2. \quad (7)$$

7. На стороне BC треугольника ABC выбрали точки B_1 и C_1. Оказалось, что $BB_1=CC_1$ и $\angle BAB_1=\angle CAC_1$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (8)

8. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и т. д. (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпании. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона. (11)

10 класс

Первый день

1. В квадрате 7×7 покрашены 19 клеток. Строка или столбец квадрата называются покрашенными, если в них содержится не менее четырех покрашенных клеток. Какое наибольшее количество покрашенных строк и столбцов может быть в квадрате? (5)

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}=c-zx, \\ \dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}=a-xy, \\ \dfrac{c}{z}-\dfrac{a}{y}=b-yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры. (6)

3. а) В некоторых целочисленных точках положительного квадранта на плоскости расположено бесконечное число прожекторов. Каждый из них освещает угол со сторонами, параллельными осям координат и сонаправленными с ними. Докажите, что можно погасить все прожекторы, кроме конечного числа, так, что при этом все ранее освещенные точки плоскости останутся освещенными. (5)

б) Та же задача для прожекторов, освещающих трехгранные углы и расположенных в целочисленных точках положительного октанта в пространстве. (4)

4. Точки M и N — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC\parallel AD$ и $BD\parallel AE$, O — точка пересечения отрезков BN и AM. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны. (9)

Второй день

5. Решите уравнение

$$x+\frac{92}{x}=[x]+\frac{92}{[x]}$$

($[x]$ — целая часть числа x). (5)

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности. (7)

7. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга? (8)

8. См. задачу 8 для 9 класса. (11)

11 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса. (5)

2. См. задачу 2 для 10 класса. (6)

3. В стране несколько городов. Между некоторыми из них в одном направлении летают самолеты. Известно, что существует город, вылетев из которого нельзя, перелетая из города в город, побывать в каждом городе страны. Докажите, что часть городов может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью авиаперелетов ни из какого города оставшейся части. (8)

4. На плоскости задано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что для любых трех точек A, B и C из этого множества ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC также принадлежит этому множеству. Найдите все такие множества. (10)

Второй день

5. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{[a_n]},\ \text{если } n\geq1$$

($[a_n]$ — целая часть числа a_n). При каких значениях n справедливо неравенство $a_n>20$? (5)

6. Существует ли в пространстве множество M прямых, удовлетворяющее двум условиям:

1) через каждую точку пространства проходят ровно две прямые из M;

2) любую точку пространства можно соединить с любой другой точкой пространства ломаной, звенья которой являются отрезками, лежащими на прямых из M? (8)

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, опи-

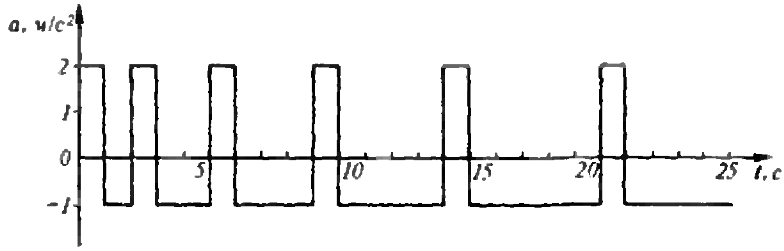


Рис. 1.

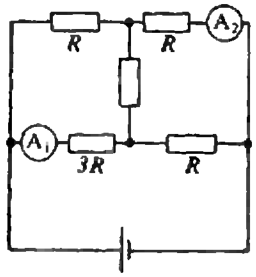


Рис. 2.

санных около треугольников ABD и ADC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам. (8)

8. В куче лежат N камней. Двое играют, по очереди забирая из кучи камни. Своим ходом игрок может взять из кучи число камней, равное делителю того количества камней, которое взял своим предыдущим ходом противник. Первый игрок своим первым ходом может взять любое (отличное от нуля) число камней, но не все N сразу. Выигрывает тот, кто возьмет камни последним. При каком наименьшем $N>1992$ второй игрок имеет выигрышную стратегию? (10)

Г. Яковлев, Н. Агаханов, А. Калинин, Л. Купцов, С. Резниченко, Д. Терёшин

Физика

По сложившейся традиции, олимпиада по физике включала в себя два тура — теоретический и экспериментальный, на каждый из которых отводилось по 4 часа.

Теоретический тур*)

9 класс

1. Покоящийся в начальный момент космический корабль начинает маневрировать вдоль прямой линии с ускорением, изменяющимся во времени так, как показано на рисунке 1. Через какое время корабль удалится на максимальное расстояние в положительном направлении от исходной точки?

2. «Вечерело. Уставший за нелегкий трудовой день Абдулла ибн Сауд присел на берегу речки и стал обдумывать свой социальный статус. В колхоз не берут, кооперативы эмир разогнал, к нему самому на службу устраиваться — так стражники без золотых даже во дворец не пускают. Эх, жизнь... Но тут взгляд Абдуллы остановился: по реке плыл какой-то предмет, и лишь маленький кусочек сургуча был виден над водой. Абдулла бросился в воду и вытащил оттуда старинный глиняный кувшин, герметично закупоренный сургучем. Распечатав кувшин и перевернув его, Абдулла обомлел: сверкнуло золото. Из кувшина высыпалось 147 одинаковых золотых монет. Монеты Абдулла спрятал, а сосуд запечатал и бросил обратно в воду. Поплыл кувшин дальше, примерно треть его объема торчала над водой.» Так говорится в одной из восточных сказок. Предполагая, что кувшин был двухлитровым, оцените массу одной золотой монеты.

3. Любитель-рыбовод, разводивший «тропических» рыб, решил поменять свои привязанности и разводить «арктических» рыб. При разведении тропических рыб для поддержания температуры воды в аквариуме $\tau_{троп}=25$ °С он использовал погруженный в воду электрический нагреватель мощностью $P_0=100$ Вт. Для холодолюбивых рыб необходима температура воды в аквариуме $\tau_{арк}=12$ °С. Чтобы обеспечить такой температурный режим, рыбовод решил использовать водопроводную воду, температура которой $\tau_{хол}=8$ °С, пропуская ее через погруженную в аквариум длинную медную трубку. (Эффективность такого теплообменника оказалась столь высокой, что выходящая из трубки вода практически находилась в тепловом равновесии с аквариумом.) Предполагая, что мощность теплообмена между аквариумом и окружающей средой пропорциональна разности температур между ними, определите минимальный расход воды ($k=\Delta m/\Delta t$) для поддержания заданного температурного режима. Комнатная температура $\tau_0=20$ °С. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К). Сильно ли изменится ответ, если любитель-рыбовод опять поменяет свои привязанности и будет разводить рыб, предпочитающих температуру $\tau^*_{арк}=16$ °С?

4. В схеме, изображенной на рисунке 2, амперметр A_1 показывает ток I_1. Какой ток показывает амперметр A_2? Оба прибора идеальные. Отмеченные на рисунке параметры считайте известными.

10 класс

1. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы из двух брусков и двух невесомых пружин, изображенной на рисунке 3. Жесткость правой пружины $k=10$ Н/м, левой — $2k=20$ Н/м, масса каждого бруска $m=100$ г, коэффициент трения между брусками $\mu=0{,}5$. В положении равновесия правая пружина растянута на $\Delta x_0=2$ см. Трения между бруском и полом нет.

2. На рисунке 4 приведены результаты

*) Часть задач теоретического тура публикуется в «Задачнике «Кванта».

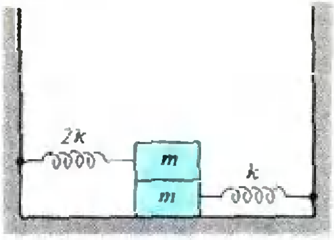


Рис. 3.

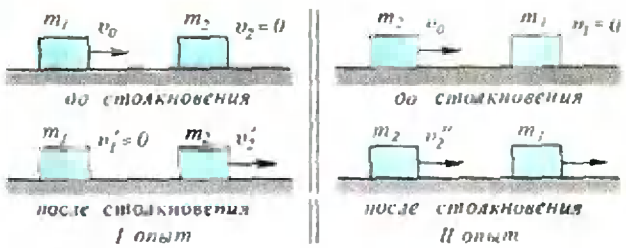


Рис. 4.

двух опытов с двумя шайбами. Поверхность стола горизонтальная и абсолютно гладкая. Измерения показали, что $v_2'=v_2''$. Найдите отношение масс шайб.

3. Кубический резервуар с ребром $a=1$ м, заполненный воздухом при нормальных условиях, разделен пополам тонким поршнем (рис. 5). Через кран левую половину резервуара медленно заполняют водой до уровня $h=a/2$. На какое расстояние сместится при этом поршень? Трения нет. Давлением паров воды можно пренебречь. Резервуар находится в изотермических условиях.

4. Над тонкостенной металлической сферой радиусом $R=5$ см на высоте $h=10$ см находится капельница с водой (рис. 6). Капли из капельницы попадают в небольшое отверстие на вершине сферы. Какой максимальный заряд может приобрести сфера, если заряд каждой капли $q=1{,}8\cdot10^{-11}$ Кл, радиус капель $r=1$ мм? Примечание: объем шара $V=4/3\ \pi R^3$.

11 класс

1. На кронштейне с помощью тонкой невесомой нити длиной $l=10$ см подвешен маленький шарик (рис. 7). Какую наименьшую горизонтальную скорость v_0 необходимо сообщить шарику, чтобы он ударился о точку подвеса?

2.— Товарищи космонавты! Вам выпала почетная обязанность первыми полететь на Солнце!

— Но там же жарко! Какой корабль это выдержит?

— Наверху сидят люди не глупее вас! Ночью полетите!

(Народный фольклор 70-х годов)

Предполагая, что наши космические корабли могут выдержать все, что угодно, найдите минимально возможный период обращения такого корабля вокруг Солнца (и обоснуйте, почему такой период минимален), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад.

3. 1 моль одноатомного идеального газа находится в теплоизолированном цилиндре, поршень которого удерживается двумя одинаковыми гирями (рис. 8). Поршень может скользить без трения. Начальная температура газа T_1, давление вне цилиндра равно нулю. Как изменится температура газа, если одну из гирь снять, а затем через некоторое время поставить обратно?

4. Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1, а на втором — Q_2. Определите заряд третьего шарика.

Экспериментальный тур

9 класс

1. Найдите центр тяжести тела неправильной формы.

Оборудование: тело неправильной формы, нить (прочность нити не позволяла подвешивать груз), миллиметровая бумага.

2. Исследуйте зависимость силы взаимодействия металлической гайки с подковообразным магнитом при различных положениях метал-

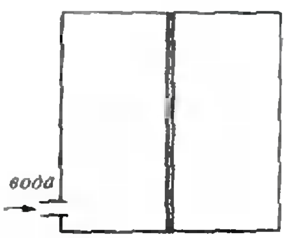


Рис. 5.

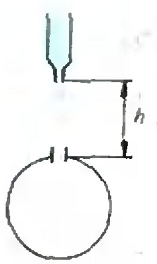


Рис. 6.

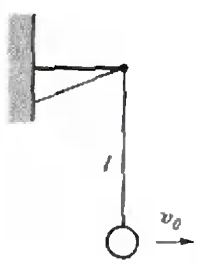


Рис. 7.

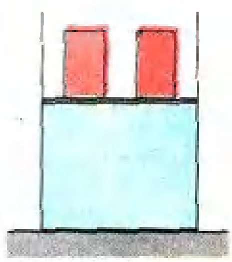


Рис. 8.

лической перемычки, соединяющей полюса магнита.

Оборудование: подковообразный магнит, металлическая перемычка, железные опилки, гайка, нить, динамометр, миллиметровая бумага.

10 класс

1. Определите, при какой концентрации соли можно получить минимальную температуру, смешивая снег с солью.

Оборудование: калориметр школьный, термометр, весы с разновесами, снег или колотый лед, соль поваренная.

2. Определите длину куска металлической проволоки.

Оборудование: источник тока, амперметр, вольтметр, ключ, соединительные провода, реостат, кусочек металлической проволоки (металлическая проволока такая же, что и на реостате).

11 класс

1. Определите плотность вещества, из которого изготовлен груз.

Оборудование: динамометр, груз, часы с секундной стрелкой.

2. Найдите среднюю плотность деревянного стержня.

Оборудование: сосуд с водой, нить, штатив с лапкой, деревянный стержень, линейка.

Жюри олимпиады приступало к проверке работ участников сразу после окончания каждого тура. Большую помощь жюри оказали студенты (главным образом — МФТИ), которые сами в прошлом участвовали и побеждали в различных олимпиадах.

Работы теоретического тура (они были зашифрованы) внимательно проверялись членами жюри не менее двух раз. При этом одну и ту же задачу у всех участников проверяла одна и та же бригада жюри (как правило, 2—3 человека) — таким образом достигалось максимальное единообразие критериев оценок. Правильно и полностью решенная задача оценивалась в 10 баллов, но за особо оригинальное решение (или же решение-обобщение, анализирующее условия применимости используемой модели) можно было получить даже 11—12 баллов.

Проверка показала, что, несмотря на то, что задачи для 9 класса были достаточно легкими, полностью справились с их решением не так много школьников. Немало участников не смогли сформулировать для себя сущность физического вопроса во второй и третьей задачах.

По традиции наиболее сложным теоретический тур был для десятиклассников. Связано это, в частности, с тем, что формирование команды на Международную олимпиаду начинается более чем за год до самой олимпиады — большинство кандидатов в команду отбирается уже по результатам выступления в 10 классе.

К сожалению, как и в прошлом году, очень легким оказался набор задач для 11 класса. Более четверти участников предложили правильные (в идейном плане) решения или контуры решений всех четырех задач. Не всем, правда, удалось довести свои мысли до победного конца.

Из экспериментальных задач хотелось бы отметить первую задачу для 10 класса — о получении минимальной температуры смеси снега и соли. (Кстати говоря, здесь возникли сложности с оборудованием — трудно оказалось отыскать необходимое количество термометров, измеряющих отрицательные температуры.) Как ни странно, именно эта задача давала наибольший простор для импровизаций — результат сильно зависел от способа приготовления смеси. Соответственно, совершенно различными получались и минимальные температуры. (Полученную участником температуру нужно было «предъявить» дежурному члену жюри.) Выявился также «профессионализм» сибиряков — как правило, у них температуры получались (почему-то) существенно ниже, чем у ребят из других регионов. За получение наинизших температур были вручены соответствующие спецпризы и грамоты.

На следующий после проведения эксперимента день каждый участник ознакомился с оценкой своей работы. Желающие могли побеседовать непосредственно с проверявшими каждую задачу членами жюри и, в случае несогласия с мнением жюри, пойти на апелляцию.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты и спецпризы за успешное участие в олимпиаде, а также специальные грамоты Министерства образования Российской Федерации учителям, подготовившим призеров олимпиады.

Но, конечно, главными призами победителям стали путевки на Межреспубликанскую олимпиаду (правопреемницу Всесоюзной), которая состоялась несмотря на все политические события.

М. Гаврилов,
О. Овчинников

Призеры XVIII Всероссийской олимпиады по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Пермь,
Гильфанов С.— Ижевск,
Мясников Н.— Омск,
Сенцов Ю.— Калуга,
Стрельников О.— Волгоград;

по 10 классам —

Александровский И.— Новосибирск,
Артельных И.— Челябинск,
Кочерова А.— Долгопрудный,
Кухта А.— Комсомольск-на-Амуре,
Семенов К.— Саратов;

по 11 классам —

Бобков А.— Балаково,
Зайцев С.— Тула,
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл.,
Кириллов М.— Новосибирск,
Климов С.— Ижевск,
Кожевников П.— Калуга,
Хайкис Д.— Ижевск.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Борисов А.— Нижний Новгород,
Кравцов А.— Старый Оскол,
Царев А.— Кострома,
Чубаров Д.— Новосибирск;

по 10 классам —

Алексеев М.— Нижний Новгород,
Бирюк А.— Краснодар,
Гуреев А.— Новгород,
Потапов И.— Новосибирск;

по 11 классам —

Берколайко Г.— Воронеж,
Казанцева Е.— Екатеринбург,
Машин А.— Новокузнецк,
Никулин М.— Обнинск,
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Аксенов Ю.— Северодвинск,
Дерезин С.— Ростов-на-Дону,
Дьяченко А.— Армавир,
Кострыкин С.— Ангарск,
Тарасов А.— Ухта;

по 10 классам —

Костин В.— Саратов,
Павловский И.— Омск,
Пионтковская И.— Тула,
Сосыка Е.— Краснодар,
Тиунов А.— Пенза;

по 11 классам —

Ветров А.— Волгоград,
Ефремов П.— Кондопога,
Лисицын Н.— Ижевск,
Мищенко В.— Омск.

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Ковальский А.— Казань,
Кроковный П.— Новосибирск,
Сербин А.— Ростов-на-Дону,
Стратонников А.— пгт Сясьстрой Ленинградской обл.;

по 10 классам —

Бабурин Д.— Красноярск,
Беленов Р.— Нижний Новгород,
Малинин С.— Ярославль,
Чиркин Д.— Грозный;

по 11 классам —

Базаров И.— Владивосток,
Гуляев Н.— Нижний Новгород,
Горгадзе В.— Нальчик,
Землянов А.— Ростов-на-Дону,
Курбатов М.— пгт Востряково Московской обл.,
Панков С.— Тула,
Померанский А.— Новосибирск,
Юдин Д.— Самара.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Горяйнов А.— Липецк,
Гращенко С.— Барнаул,
Любшин Д.— Пермь,
Сытник Д.— Тверь,
Табакин Д.— Архангельск;

по 10 классам —

Бочкарёв О.— Саратов,
Ларькин В.— пгт Правдинск Нижегородской обл.,
Томилов Ф.— Архангельск,
Тяписев А.— Новокузнецк;

по 11 классам —

Болдырев С.— Ростов-на-Дону,
Июгин Б.— Тула,
Мифтахов В.— Туймазы,
Шихирев К.— Новосибирск.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Барыбин И.— Барнаул,
Киракозов М.— Вологда,
Конаков М.— Алатырь,
Осиновский Д.— Курск;

по 10 классам —

Гвоздев П.— Котельнич,
Головатый А.— Ступино,
Кокорич М.— пгт Агинское Читинской обл.,
Погорелов О.— Брянск;

по 11 классам —

Абалмасов В.— Прокопьевск,
Галанин А.— Сергиев Посад,
Козлов В.— Старый Оскол,
Полянский М.— Нижний Новгород.

IV Всероссийская олимпиада по информатике

Одним из следствий бурных политических событий, произошедших со времени проведения предыдущей Всероссийской олимпиады по информатике, стал выход ее на уровень общенациональных олимпиад. Чтобы соответствовать новому статусу, пришлось во многом пересмотреть порядок организации этой олимпиады. В этом году в ней приняли участие команды Москвы, Санкт-Петербурга и специализированных школ-интернатов, традиционно добивавшиеся высоких результатов на прежних всесоюзных соревнованиях. В итоге, в подмосковном городе Троицке с 22 по 27 марта состязались 102 школьника из более чем 70 территорий России.

Проведение олимпиады осложнилось организационными и финансовыми проблемами, так что менее чем за месяц до начала олимпиады нельзя было определенно сказать, где она состоится. В этой сложной ситуации все заботы о проведении IV Всероссийской олимпиады по информатике взял на себя Комитет по народному образованию администрации Московской области во главе с его председателем В. Егоровым. Благодаря его усилиям и энтузиазму сотрудников Троицкого центра информатики «Байтик», олимпиада состоялась и по отзывам всех участников прошла на достойном для таких олимпиад уровне.

Как и на всех прошлых международных и всесоюзных олимпиадах по информатике, оба тура здесь были равноправными. В каждом туре участникам предлагалось по одной задаче и на ее решение отводилось четыре часа. Разрешалось пользоваться любой литературой; запрещалось лишь использование дискет с нестандартным программным обеспечением.

Изменился и подход к формированию олимпиадных задач. Если раньше предлагалось несколько разноплановых задач, то на этот раз на каждом этапе задача имела многоуровневый характер и содержала несколько подзадач различной сложности, объединенных общей идеей.

После тщательного обсуждения предложенных задач жюри, возглавляемое заместителем директора Троицкого института инновационных и термоядерных исследований Д. Соболенко, отобрало следующие две.

Задача I тура

(автор В. Прохоров)

Пусть W — множество всех замкнутых односвязных ломаных на координатной плоскости xOy, удовлетворяющих условиям:

а) каждые два соседних звена ломаной взаимно перпендикулярны;

б) каждое звено ломаной параллельно одной из осей координат;

в) отсутствуют самопересечения или самокасания ломаной;

г) $(x1, y1)$, ..., (xN, yN) — целочисленные координаты всех точек, где ломаная претерпевает излом (порядок нумерации произволен и неизвестен), N — количество изломов.

Требуется:

А. Написать по возможности оптимальные (по времени исполнения) программы (с обоснованием алгоритмов), которые по задаваемым N и $(x1, y1)$, ..., (xN, yN) выдавали бы и отображали на экране монитора:

1) какую-либо ломаную из множества W;

2) ломаную из множества W, имеющую наибольшую длину, и значение этой длины;

3) ломаную из множества W, ограничивающую наибольшую площадь, и значение этой площади;

4) количество ломаных в множестве W.

Б. Решить задачу А, исключив пункт б) из определения W.

Примечание. Односвязной называется ломаная, из любой точки которой можно попасть в любую другую ее точку, двигаясь по этой ломаной.

Задача II тура

(авторы Е. Андреева и А. Марченко)

В билете пассажира оказалось пробито отверстий больше, чем штырей в компостере. Пассажир утверждал, что пользовался только одним компостером, но случайно нажал его несколько раз. Контролеру требуется определить, могло ли быть получено заданное расположение отверстий одним и тем же компостером, если билет можно пробивать с обеих сторон неограниченное число раз и произвольно перемещать и поворачивать относительно компостера. Пробитые отверстия не выходят за пределы билета. В билете было пробито N ($N<10$) отверстий.

Требуется:

А. Для компостера с двумя штырями ($S=2$) составить программу, которая:

1) Определяет, можно ли получить заданным компостером требуемое расположение отверстий в билете. Если это возможно, то изображает вид билета после каждого нажатия компостера. В противном случае, выводит соответствующее сообщение.

2) Определяет количество K различных компостеров, каждым из которых можно пробить заданную конфигурацию.

3) При $K=0$ (см. пункт 2) находит компостер, с помощью которого можно пробить наибольшее количество из заданных отверстий.

4) Находит минимальное число нажатий, требуемое для пробивки заданной конфигурации

отверстий, для каждого компостера из пункта 2.

Б. Решить задачу А для компостеров с числом штырей S ($S>2$).

Примечания. Все исходные данные — натуральные числа.

Компостеры, дающие при однократном нажатии совпадающие конфигурации отверстий, считаются одинаковыми.

Относительное расположение отверстий в билете и штырей в компостере вводятся либо с клавиатуры, либо из файла с именем COMP.DAT.

Структура вводимой информации: $\{N, x1, y1, \ldots, xN, yN, S, u1, v1, \ldots, uS, vS\}$, где xi, yi — координаты отверстий в билете, ui, vi — координаты штырей в компостере.

Нажатие компостера следует моделировать клавишей «Пробел».

При выводе конфигурации на экран следует изображать координатную сетку. При этом программа должна осуществлять подходящее масштабирование.

На обоих турах всем участникам предоставлялись однотипные персональные компьютеры IBM PC XT. В качестве систем программирования допускалось использование Turbo Pascal 5.0, Turbo Pascal 5.5, Quick Basic, GW-Basic, Microsoft C, Quick C, Turbo C++.

При проверке каждая задача оценивалась исходя из 100 баллов. Оценка задачи 1 тура осуществлялась с помощью тестов и путем анализа представленных описаний с обоснованиями наилучших алгоритмических решений, как это требовалось в условии. Лучшими были признаны решения Дмитрия Давыдка из Санкт-Петербурга (87 баллов), Сергея Иоффе из подмосковной Черноголовки (65 баллов) и Игоря Офенбаха из Омска (59 баллов).

Задача второго тура оценивалась из предположения, что правильность представленных алгоритмов должна подтверждаться результатами работы программы. Многие участники олимпиады справились с этим заданием лучше, чем с предыдущим. Здесь наибольшего успеха добились москвич Евгений Кузнецов (61 балл), Андрей Ласкин из подмосковного города Фрязино (54 балла) и Марат Шарифуллин из Усинска (53 балла).

Абсолютными победителями по итогам двух туров были признаны Сергей Иоффе (117 баллов), Дмитрий Давыдок (113 баллов) и Роман Елизаров, как и Дмитрий, петербуржец (104 балла).

Среди учеников 11-х классов 5 человек получили дипломы I степени (они набрали от 90 до 117 баллов), 6 человек — дипломы II степени (63—84 балла), 6 человек — дипломы III степени (48—61 балл). Диплом третьей степени получила также единственная девушка на олимпиаде — Елена Никитина (г. Екатеринбург). Она же была награждена специальным призом центра информатики «Байтик».

Среди учащихся невыпускных классов диплом I степени получили двое (91—104 балла), диплом II степени — четверо (55—67 баллов) и диплом III степени — пятеро (31—50 баллов). Наряду с дипломами многие победители олимпиады получили памятные призы и подарки. Среди специальных призов были также призы компьютерного журнала для молодежи «Байтик». Особо хотелось бы отметить ученика 8 класса средней школы № 55 Нижнего Новгорода Андрея Черняховского, который получил диплом III степени и приз как самый юный участник олимпиады.

По окончании олимпиады были объявлены кандидаты в сборную России по информатике для участия в олимпиаде СНГ. Ими стали все обладатели дипломов первой степени.

В. Кирюхин

Призеры IV Всероссийской олимпиады по информатике

Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

Елизаров Р. — Санкт-Петербург,
Шевяков Р. — Волгоград;

по 11 классам —

Иоффе С. — п. Черноголовка Московской обл.,
Давыдок Д. — Санкт-Петербург,
Кузнецов Е. — Москва,
Жуков Д. — Москва,
Россиев А. — Красноярск.

Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

Кленин А. — Владивосток,
Миронов И. — Санкт-Петербург,
Виноградов А. — Рыбинск,
Бычков С. — Москва;

п о 11 к л а с с а м —

Гузеев А.— Пермь,
Офенбах И.— Омск,
Тучинский С.— Воронеж,
Гладышев П.— Челябинск,
Шарифуллин М.— Усинск,
Черенков А.— Нальчик.

Дипломы III степени

п о 8—10 к л а с с а м получили

Нестеренко О.— Нальчик,
Черняховский А.— Нижний Новгород,
Орлов Л.— Чебоксары,
Каляткин И.— Бийск,
Каменский Н.— Бийск;

п о 11 к л а с с а м —

Пер Ю.— Тула,
Ласкин А.— Фрязино Московской обл.,
Шестаков А.— Оренбург,
Кунков С.— Екатеринбург,
Хохолков В.— Сургут,
Меньков А.— Костомукша,
Никитина Е.— Екатеринбург.

XXXII Всеукраинская математическая олимпиада

Предлагаем вам задачи заключительного этапа XXXII Всеукраинской математической олимпиады, состоявшегося в конце марта 1992 г. в Чернигове.

8 класс

1. Докажите, что если для натуральных чисел n и m справедливо равенство $2m=n^2+1$, что число m можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, а центр O этой окружности лежит внутри четырехугольника. Известно, что $\angle AOB+\angle COD=180°$. Докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны четырехугольника, равна половине периметра четырехугольника $ABCD$.

3. На каждой грани непрозрачного куба написано некоторое натуральное число. Если несколько граней куба (одну, две или три) можно увидеть одновременно, то выписываем сумму чисел, написанных на этих гранях. Какое максимальное количество разных чисел можно получить таким способом?

4. Известно, что значение трехчлена $p(x)=ax^2+bx+c$ для любого целого числа x также будет целым числом. Обязательно ли

а) хотя бы один из коэффициентов a, b, c будет целым числом;

б) все коэффициенты a, b, c будут целыми числами?

5. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D, причем известно, что из точек A, C, D ближе всех к B лежит точка A, а из точек A, B, C ближе всего к D лежит точка C. Докажите, что отрезки AB и CD не имеют общих точек.

6. Докажите, что если действительные a, b, c удовлетворяют условию $a\geqslant b\geqslant c>0$, то выполняется неравенство

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\geqslant 3a-4b+c.$$

9 класс

1. Сумма всех членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k\geqslant 92)$ равна 1992. Какие значения может принимать сумма $a_{10}+a_{92}$ в зависимости от числа k?

2. На каждой грани непрозрачного куба написано некоторое натуральное число. Если несколько граней куба можно увидеть одновременно, то выписываем сумму чисел, написанных на этих гранях.

а) Докажите, что на гранях куба можно написать такие числа, чтобы все суммы были разными.

б) Какое наименьшее значение может принимать наибольшая из таких сумм, если известно, что все эти суммы различные.

3. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Докажите, что если ни одно из чисел $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(1992)$ не делится на 1992, то многочлен $f(x)$ не имеет целых корней.

4. На данной окружности выбрали точку A, а внутри окружности — точку D. Пусть M — центроид треугольника ABC, вершины B и C которого лежат на данной окружности, а сторона BC проходит через точку D. Найдите геометрическое место точек M.

5. Два игрока по очереди ставят шашки (первый — белые, второй — черные) на клетки шахматной доски 25×25. Шашки можно ставить на любые свободные поля, кроме тех полей, на всех соседних с которыми уже стоят шашки того же цвета (соседними считаются поля, которые имеют общую сторону). Проигрывает тот, кто не может сделать свой очередной ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

6. Найдите все простые числа $p \leqslant 1000$, для которых $2p+1$ будет степенью натурального числа (т. е. будет выполняться равенство $2p+1=m^n$, где m и n — натуральные и $n \geqslant 2$).

7. Можно ли правильный 1992-угольник разрезать на параллелограммы?

8. Проверьте, что окружность $x^2+2x+y^2=1992$ проходит через точку A (42; 12), и докажите, что эта окружность содержит бесконечное число точек $B(x; y)$, обе координаты x и y которых — рациональные числа.

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC. Докажите, что равенство $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда треугольник — правильный.

3. Докажите, что система уравнений

$$x^2+4yz+2z=0,$$
$$x+2xy+2z^2=0,$$
$$2xz+y^2+y+1=0$$

не имеет решений в действительных числах.

4. Дана конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ действительных чисел. Член a_k этой последовательности будем называть отмеченным, если среди чисел a_k, $a_k+a_{k+1}, \ldots, a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n$ хотя бы одно положительно. Докажите, что сумма всех отмеченных чисел положительна.

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого неравенство

$$\sin^n x+\cos^n x>1/2$$

выполняется при всех $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Точки A и B лежат на сторонах выпуклого многоугольника F, а точка A_1 такова, что $\vec{AB}=\vec{BA_1}$. Пусть F_1 — выпуклый многоугольник наименьшей площади, содержащий многоугольник F и точку A_1. Докажите, что его площадь не больше удвоенной площади многоугольника F.

7. Докажите, что для любых чисел a, b, c, d из отрезка [1, 2] выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a} \leqslant \frac{4(a+c)}{b+d}.$$

8. Из шахматной доски размером 100×100 вырезано 800 четырехклеточных фигурок в виде буквы «Т». Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать еще одну такую фигурку.

11 класс

1. Существует ли набор из 1991 попарно не параллельных векторов такой, что для любых двух векторов этого набора среди остальных найдется третий вектор, перпендикулярный к этим двум векторам?

2. Пусть ABC — произвольный треугольник. Через точку K, взятую на стороне AB, проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону BC в точке L, и прямая, параллельная BC и пересекающая сторону AC в точке M. При каком положении точки K площадь треугольника KLM будет наибольшей? Чему равна эта площадь, если площадь треугольника ABC равна S?

3. В каждой вершине правильного 1992-угольника записано положительное число, причем каждое из этих чисел равно или среднему геометрическому, или среднему арифметическому двух чисел, записанных в соседних вершинах. Известно, что среди записанных чисел есть число 26. Найдите остальные записанные числа.

4. Докажите, что число $(\operatorname{arctg} 4/3)/\pi$ — иррационально.

5. Докажите, что если $a>b>c$, то

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

6. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что равенство $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда треугольник ABC — правильный.

7. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Плоскость, проходящая через вершину A и перпендикулярная ребру SC, пересекает боковые ребра SC, SB и SD в точках C_1, B_1 и D_1. Докажите, что вокруг многогранника $ABCDB_1C_1D_1$ можно описать сферу.

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Публикацию подготовили А. Ганюшкин, В. Михайловский, И. Опульский, В. Радченко

„Квант" улыбается

Кто вы: физик или математик?

Как вы мыслите: физически или математически? Следующий великолепный тест позволит безошибочно определить, физик вы или математик.

Вы находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и пустая кастрюля. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Должно быть, на этот вопрос вы ответили бы так: «Я налил бы в кастрюлю холодной воды из крана, зажег плиту, поставил кастрюлю на огонь и подождал бы, пока вода в кастрюле не нагреется». Прекрасно! На этом этапе между математиками и физиками царит полное согласие. Различие в подходе обнаруживается при попытке решить следующую задачу.

Вы снова находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и кастрюля, в которую налита холодная вода. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Большинство людей отвечает: «Зажег бы плиту и поставил кастрюлю с водой на огонь». Если вы думаете так же, то вы физик! Математик бы вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы новую задачу к предыдущей, которая решена.

Мы могли бы продвинуться еще на один шаг и рассмотреть случай, когда кастрюля с холодной водой уже поставлена на огонь. Как получить горячую воду в этом случае? Физик просто подождал бы, пока вода не нагреется, а математик погасил бы огонь, вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы нашу новую задачу к первой (или ограничился бы тем, что погасил огонь, сведя задачу ко второй, уже решенной).

Еще более наглядно различие между физиком и математиком проявляется

в следующем («драматическом») варианте задачи. Представьте себе, что в доме, где вы находитесь, начался пожар. В вашем распоряжении пожарный кран и шланг (не присоединенный ни к чему). Как потушить пожар? Ясно, что прежде всего необходимо присоединить шланг к крану, а затем пустить струю воды в пламя. Предположим теперь, что в вашем распоряжении пожарный кран, шланг (не присоединенный ни к чему) и никакого пожара в доме нет. Как бы вы стали тушить пожар? Математик сначала поджег бы дом, чтобы свести задачу к предыдущей.

Из книги Р. Смаллиана «Как же называется эта книга?» (М.: Мир, 1981). Перевод с английского Ю. Данилова

Ответы, указания, решения

[redacted] с парапсихологии

При угадывании чисел Степа Мошкин подсказывал Тимуру следующим образом. Цифрам поставили в соответствие первые 10 букв алфавита: 1 — а, 2 — б, 3 — в, 4 — г, 5 — д, 6 — е, 7 — ж, 8 — з, 9 — и, 0 — к. Если взять первые буквы слов, произнесенных Степой, то получим необходимые числа.

Теперь о фокусах, показанных Тимуром. Если Оля написала число a, а Тимур назвал число b, то после проведения описанных действий получится число $(a+b)^2-a^2=(2a+b)b$. Таким образом, если Тимур разделит названный результат на b, из частного вычтет b и результат разделит на 2, то получит число a.

Следующий фокус основан на том, что произведение $7\cdot 11\cdot 13=1001$. Ясно, что Тимур получит первоначальное число, разделив последний результат на 2.

В третьем фокусе Тимур записывает на открытке число от 1 до 50, а называет число, дающее в сумме с написанным 99. Это число больше 50, но меньше 100, поэтому сумма двух чисел — написанного первоначально на доске и произнесенного Тимуром — больше 100, но меньше 200. Значит, стирается цифра 1, т. е. записанная сумма уменьшается на 100, потом прибавляется 1, т. е. уменьшение будет равно 99. Если теперь из первоначального числа вычесть полученное число, то получим число, равное разности 99 и числа, названного Тимуром, т. е. число, записанное на открытке.

[redacted]ны сохранения [redacted]лятивистской динамике

1. Запишем закон сохранения энергии:

$$m_0c^2=m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}+h\nu,$$

откуда $\nu<0$, что противоречит здравому смыслу.

2. $v=(c\cos\alpha)/(1+\sin\alpha)\approx 0{,}27\,c$.

3. $\Delta\nu=\nu_1-\nu_1'=m_0c^2/(4h)$;

$$\alpha=\arccos\left(1-\frac{m_0^2c^4}{h\nu_1(4h\nu_1-m_0c^2)}\right).$$

[redacted]II Всероссийская олимпиада [redacted]атематике и физике

Математика

9 класс

1. **Ответ:** $(\sqrt{6};\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$, $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

Указание. Разделив первое уравнение на x, а второе — на y, вычтем второе из полученных уравнений из первого. После преобразований приходим к уравнению $x^2=y^2$.

2. Всю доску, кроме какой-либо одной клетки, разделим на прямоугольники 1×2. Первый ход начинающему нужно сделать в эту отдельную клетку. Затем, если второй игрок занимает клетку какого-либо прямоугольника 1×2, то следующим ходом начинающему надо занять вторую клетку этого же прямоугольника. Таким образом, начинающий игрок всегда сможет сделать очередной ход.

3. Из условия следует, что $BM=BK$, а так как $AB=BC$, то $AC\parallel KM$, и $\angle APN=\angle KMP$. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle NKA=\angle KMP$. Значит, $\angle AKN=\angle APN$ и точки A, K, P, N лежат на одной окружности (рис. 1).

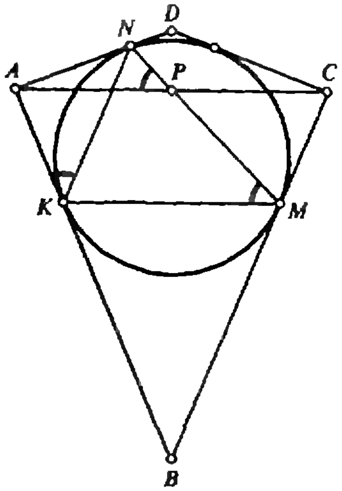


Рис. 1.

4. Так как каждый маршрут имеет не более одного поворота, то он идет не более чем по одной вертикальной и не более чем по одной горизонтальной улицам. Поэтому, если допустить, что маршрутов менее n, то найдутся горизонтальная и вертикальная улицы, по которым не проходит ни одного маршрута, и по перекрестку, образуемому этими улицами, также не пройдет никакой маршрут. Следовательно, маршрутов должно быть не менее n. Автобусная сеть из n маршрутов, удовлетворяющая всем условиям задачи, существует. Например, сеть, i-й маршрут которой определяется следующим образом: он проходит по

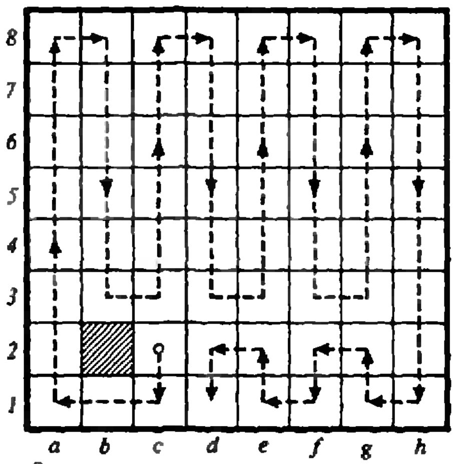


Рис. 2.

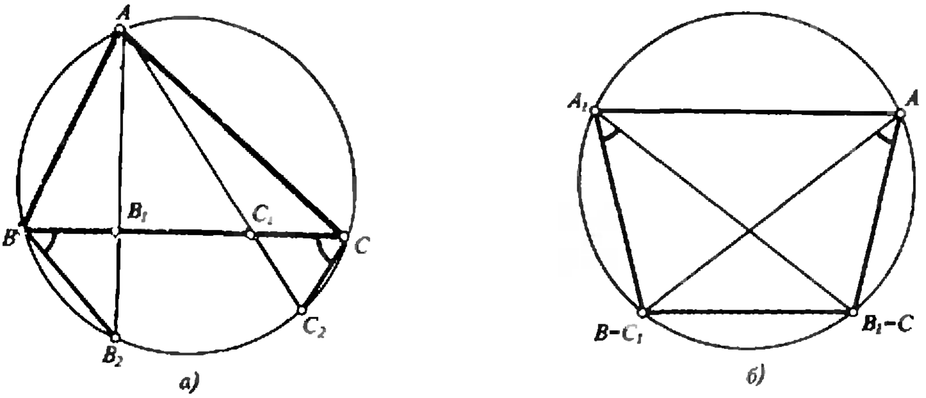


Рис. 3. а) б)

всей i-й вертикальной улице и затем слева направо по последней горизонтальной улице.

5. а) Можно (см. рис. 2). б) Нельзя. Вырезанные клетки — черные, поэтому на доске осталось 30 черных и 32 белых клетки. При каждом ходе цвет клетки, в которой находится фишка, меняется. А это значит, что число белых клеток, в которых побывала фишка, может превзойти количество черных клеток не более, чем на единицу.

6. Ответ: $x=y=3$, $z=5$. Из условия следует, что $2^{x+1}=(z-y)(z+y)$, т. е. $z-y=2^k$, $z+y=2^{x-k+1}$, где k — целое число, причем $0\leqslant k<x-k+1$. Отсюда $z=2^{k-1}+2^{x-k}$, $y=2^{x-k}-2^{k-1}$. Если $k-1\geqslant 1$, то y и z не могут быть одновременно простыми. Если $k=1$, то $z=2^{x-1}+1$, $y=2^{x-1}-1$, а числа $y=2^{x-1}-1$, 2^{x-1} и $z=2^{x-1}+1$ — последовательные натуральные числа, поэтому одно из них делится на три, т. е. либо z, либо y делится на 3, т. е. равно трем. Если $z=3$, то $y=1$ и не является простым. Если $y=3$, то $z=5$, а $x=3$.

7. Первое решение. Продлим AB_1 и AC_1 до пересечения с описанной вокруг треугольника ABC окружностью в точках B_2 и C_2 (рис. 3, *а*). Так как $\angle BAB_1=\angle CAC_1$, равны дуги BB_2 и CC_2, а значит, и хорды BB_2 и CC_2. Углы BCC_2 и CBB_2 равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Таким образом, треугольники BB_1B_2 и CC_1C_2 равны, откуда $\angle BB_2B_1=\angle CC_2C_1$, т. е. равны хорды AB и AC. Второе решение. (Предложено учеником 9 класса Олегом Стрельниковым из Волгограда.) Перенесем треугольник AC_1C параллельно так, чтобы отрезки BB_1 и C_1C совпали (рис. 3, *б*). Пусть точка A при этом переходит в точку A_1. Трапеция A_1ABB_1 равнобокая, т. к. около нее можно описать окружность ($\angle BA_1B_1=\angle BAB_1$) и, следовательно, имеет равные диагонали AB и A_1B_1.

8. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

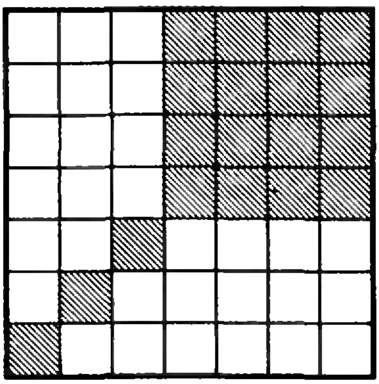


Рис. 4.

10 класс

1. Ответ: 8. Покажем, что покрашенных строк и столбцов не больше 8. Действительно, если их общее количество больше 8, то по крайней мере 5 строк, либо 5 столбцов покрашены. Это означает, что в покрашенных строках (столбцах) не менее $4\times5=20$ покрашенных клеток, а их, по условию задачи, 19. На рисунке 4 приведен пример с 8 покрашенными строками и столбцами (4 строки и 4 столбца) при 19 покрашенных клетках.

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

3. а) Оставим гореть прожектор A, один из ближайших к оси Ox, и прожектор B, один из ближайших к оси Oy. Кроме того, оставим гореть все прожекторы, расположенные в прямоугольнике (возможно, вырожденном) с противоположными вершинами A и B и сторонами, параллельными осям координат.

б) Рассмотрим проекции всех прожекторов на плоскость Oxy и выберем из них конечное число по способу а). Для каждой выбранной проекции оставим в пространстве гореть прожектор с наименьшим значением z-координаты, имеющий эту проекцию. Пусть n — наибольшая z-координата всех оставленных прожекторов. Тогда всякий прожектор с z-координатой, не меньшей n, уже освещается выбранными. Остается рассмотреть конечное число слоев $z=1, 2, \ldots, n$, и в каждом из них по способу а) выбрать конечное число прожекторов.

4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

5. Ответ: $x=n$, n — любое отличное от нуля целое число, и $x=-9{,}2$.
Из уравнения следует, что $x\neq0$, $[x]\neq0$ и

$$(x-[x])\left(1-\frac{92}{x[x]}\right)=0,$$

т. е. либо $x=[x]$, либо $1-\frac{92}{x[x]}=0$.

В первом случае x — целое число, во втором: $x[x]=92$. Пусть $[x]=n$, тогда $x=n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$ и

$$n(n+\alpha)=92. \qquad (1)$$

В силу неравенств $n\leqslant n+\alpha<n+1$ из (1) следует при $n>0$, что $n^2\leqslant 92<n(n+1)$.

Это неравенство не имеет решений в целых числах. При $n<0$ из (1) следует, что $n^2\geqslant 92>n(n+1)$.

Это неравенство имеет решение в целых числах, а именно: $n=-10$. Тогда $(-10)\cdot(-10+\alpha)=92$, $\alpha=0{,}8$, т. е. $x=-9{,}2$.

6. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

8. См. решение задачи 8 для 9 класса.

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 10 класса.
2. См. решение задачи 2 для 10 класса.
3. Из условия следует, что существуют города A и B такие, что из A нельзя попасть в B. Предположим, что отделились города, в которые нельзя попасть из A. Если из A можно попасть в C, а D — город из отделившейся части, то в D нельзя попасть из C, так как иначе можно было бы из A через C перелететь в D. Следовательно, отделившаяся часть городов удовлетворяет требуемому условию.
4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда углы ABC и AHC со взаимно-перпендикулярными сторонами в сумме дают $180°$ (рис. 5, *а, б, в*). Следовательно, во-первых, если треугольник ABC тупоугольный, то треугольник AHC — остроугольный. Во-вторых, по теореме синусов ($2R=a/\sin\alpha$) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHC равны, так как у этих треугольников сторона AC общая, а синусы углов ABC и AHC равны. Из первого следует, что возможны два случая: а) любые три точки, входящие в данное множество M, являются вершинами прямоугольного треугольника; б) множество M содержит в себе вершины остроугольного треугольника.

В случае а) множество M состоит из трех точек — вершин прямоугольного треугольника,— либо из четырех точек — вершин прямоугольника.

Рассмотрим случай б). Опишем около каждого остроугольного треугольника с вершинами в точках множества M окружность и выберем из них окружность наибольшего радиуса. Пусть это окружность s радиуса R, описанная около $\triangle ABC$ (рис. 6). Покажем, что множество M не может содержать точку E, отличную от точек A, B, C и H (H — ортоцентр $\triangle ABC$). Пусть точка E лежит в $\triangle ABC$, например, в $\triangle AHC$ (точка E_1), H_1 — ортоцентр $\triangle AE_1C$. Тогда если R_1 — радиус окружностей, описанных около $\triangle AE_1C$ и $\triangle AH_1C$, то из теоремы синусов $R_1>R$, так как $\angle AE_1C>\angle AHC>90°$ и, значит, $\sin\angle AE_1C<\sin\angle AHC$.

Аналогично показываем, что $\sin\angle AEC<\sin\angle AHC$ в случаях, когда точка E лежит внутри окружности s, но вне $\triangle ABC$ (для точки E_2: $\angle AE_2C>\angle ALC=\angle AHC$, так как $\angle ALC+\angle ABC=180°$), и когда точка E лежит вне s (для точки E_3: $\angle AE_3C<\angle ANC=\angle ABC<90°$). Таким образом, в этих случаях возникает противоречие с нашим предположением о максимальности R. Если же точка E лежит на окружности s (точка E_4), то ортоцентр H_4 $\triangle AE_4C$ отличен от точек A, B, C, H и не лежит на s (если $H_4\in s$, то $\angle AE_4C=90°$, и, следовательно, $\angle ABC=90°$). Поэтому, как мы показали выше, радиус одной из окружностей будет больше R. Итак, мы доказали, что в случае б) множество M может состоять только из четырех точек: вершин произвольного остроугольного треугольника и его ортоцентра.

З а м е ч а н и е. Другое решение этой задачи (предложенное учеником 11 класса Александром Бобковым из г. Балаково Саратовской области) можно получить, рассмотрев наименьший выпуклый многоугольник (так называемую *выпуклую оболочку*), содержащий все точки данного множества. Легко заметить, что этот многоугольник не содержит тупых углов, следовательно, является либо прямоугольником, либо нетупоугольным треугольником. Далее можно показать, что в первом случае и в случае прямоугольного треугольника внутри выпуклой оболочки больше нет точек данного множества, а в случае остроугольного треугольника есть еще одна точка — его ортоцентр.

5. О т в е т: $n>191$.

Вычислив несколько первых членов последовательности

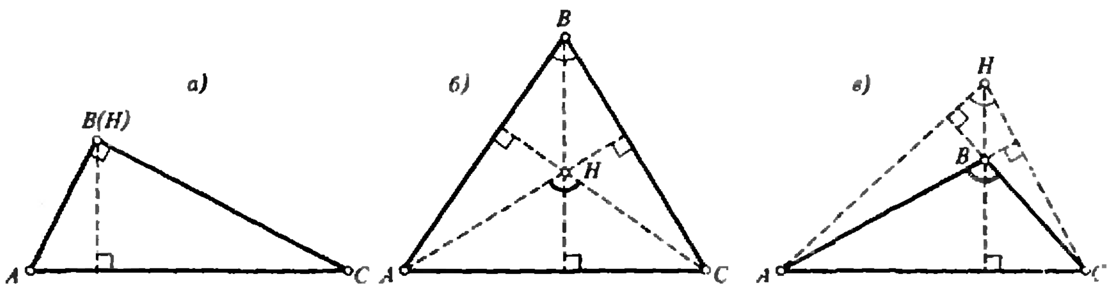


Рис. 5.

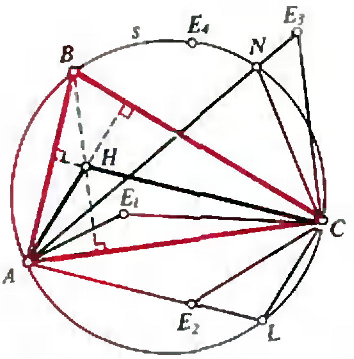


Рис. 6.

$$a_2=2,\ a_3=2\frac{1}{2},\ a_4=3,\ a_5=3\frac{1}{3},\ a_6=3\frac{2}{3},$$

$$a_7=4,\ a_8=4\frac{1}{4},\ \ldots,$$

замечаем закономерность: последовательность монотонно возрастает и ее члены имеют вид

$$m+\frac{k}{m},\ \text{где}\ 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

Докажем это.

При $n=1$ утверждение очевидно. Если $a_n=m+\frac{k}{m}$, то $[a_n]=m$ и, значит, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{[a_n]}=\left(m+\frac{k}{m}\right)+\frac{1}{m}=m+\frac{k+1}{m}$.

Получили, что $a_{n+1}=m+1$, если $k=m-1$, и $a_{n+1}=m+\frac{l}{m}$, где $l\leqslant m-1$, если $k<m-1$.

Итак, один член последовательности имеет целую часть, равную 1, два члена — равную 2, три — равную 3,... Поэтому целую часть, не превосходящую 19, имеют $1+2+3+\ldots+19=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ членов последовательности, $a_{191}=20$ и $a_n>20$ при $n>191$.

6. **Ответ:** множество M существует.

Первый пример. Для удобства введем в пространстве систему координат $Oxyz$. Множество M образуем из четырех множеств M_1, M_2, M_3 и M_4 ($M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$):

множество M_1 состоит из всех прямых, параллельных оси Ox;

множество M_2 состоит из всех прямых, параллельных оси Oy и лежащих в полупространстве $x>0$;

множество M_3 состоит из всех прямых, параллельных оси Oy и лежащих в полупространстве $x<0$;

множество M_4 состоит из прямых, лежащих в плоскости $x=0$ и параллельных в этой плоскости биссектрисе $y=z$.

В полупространствах $x>0$ и $x<0$ мы можем перемещаться вдоль прямых множеств M_1, M_2 и M_3, причем возможно перемещение (вдоль прямых множества M_1) из одного полупространства в другое. Таким образом, возможно любое перемещение в плоскости, параллельной плоскости Oxy. Переход с одной такой плоскости на другую можно осуществить с помощью перемещения вдоль прямых множества M_4.

Второй пример. Можно предыдущий пример «облагородить» в том смысле, что во множестве M не будет таких разрывов как в построенном ранее. Множество M мы образуем из множества M_1 и M_5 ($M=M_1\cup M_5$). Множество M_1 из первого примера, а M_5 построим следующим образом: через все точки каждой плоскости $x=a$ проведем параллельные друг другу прямые так, что проекция прямой, проходящей через точку $(a;\ 0;\ 0)$ на плоскость Oyz, имеет уравнение $z=ay$. Докажите самостоятельно, что построенное множество прямых удовлетворяет условию задачи.

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

8. **Ответ:** $N=2048$.

Докажем, что при $N>1$ второй игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда $N=2^n$.

Пусть $N=2^n$ ($n\geqslant 1$), и своим первым ходом первый игрок взял из кучи $2^{n_1}(2k_1+1)$ камней, $n_1\geqslant 0$, $k_1\geqslant 0$. Тогда второй игрок выигрывает, если будет придерживаться следующей стратегии: первым ходом он берет 2^{n_1} камней и далее каждым m-м ($m\geqslant 2$) ходом — ровно столько, сколько взял своим ($m-1$)-м ходом противник. Действительно, после каждого хода первого игрока, при котором берется 2^{n_m} камней, $0\leqslant n_m\leqslant n_{m-1}$, остающееся число камней равно нечетному числу, умноженному на 2^{n_m}. Поэтому последний камень достанется второму игроку.

Пусть теперь $N=2^n(2k+1)$, $k\geqslant 1$. В этом случае выигрывает первый игрок, если он будет играть следующим образом: первым ходом он берет 2^n камней и далее каждым m-м ($m\geqslant 2$) ходом — ровно столько, сколько взял своим ($m-1$)-м ходом противник. Выигрышность этой стратегии доказывается аналогично предыдущему случаю.

Итак, второй игрок имеет выигрышную стратегию лишь при $N=2^n$. Наименьшая степень двойки, превосходящая 1992, равна 11, т. е. искомое наименьшее значение N равно $2^{11}=2048$.

Физика

9 класс

1. $t=12$ с.
2. $m\approx 4{,}54$ г.
3. $\frac{\Delta m}{\Delta t}\approx 9{,}5$ г/с; $\frac{\Delta m^*}{\Delta t}\approx 2{,}4$ г/с.
4. $I_2=2I_1$.

10 класс

1. $x_{max}\leqslant 5{,}8$ см.
2. $m_2/m_1=2$.
3. $x\approx 0{,}17$ м.
4. $Q_{max}\approx 1{,}9\cdot 10^{8}$ Кл.

11 класс

1. $v_{0\,min}\approx 1{,}93$ м/с.
2. См. решение задачи Ф1353 из «Задачника «Кванта» в этом номере журнала.
3. $\Delta T=0{,}12T_1$.
4. $Q_3=Q_2^2/Q_1$.

[redacted]сероссийская олимпиада [redacted]информатике

I тур. Решение п.А задачи основывается на том факте, что для заданных координат ($x1$, $y1$), ..., (xN, yN) множество W либо пусто (ломаную построить нельзя), либо включает только одну ломаную. Действительно, исходя из условий а) и б), через каждую точку излома можно провести одно вертикальное звено, направленное вверх или вниз. Поскольку каждое такое звено определяется двумя точками, то количество вершин, имеющих одинаковую абсциссу, должно быть четным, и тогда по этим вершинам можно однозначно восстановить все вертикальные звенья ломаной путем их попарного соединения вдоль каждой абсциссы. Аналогичное можно сказать и о всех звеньях, параллельных оси абсцисс. Из этого следует, что при выполнении условий четности, заданный набор точек, в которых ломаная претерпевает излом, будет однозначно определять ломаную, удовлетворяющую условиям а) и в).

Легко видеть, что полученная таким образом ломаная может не являться искомой, так как здесь могут иметь место самопересечения, либо она может оказаться разомкнутой. Дополнительные проверки должны установить факт наличия или отсутствия ломаной в множестве W.

Основная идея решения п. Б задачи сводится к следующему. Одну из заданных точек излома последовательно соединяем с каждой из оставшихся точек, совмещая при этом с полученным направлением одну из осей координат. Для каждого из расположений осей координат осуществляем пересчет координат всех заданных точек излома, после чего с помощью ранее рассмотренного для п. А алгоритма находим требуемое решение. Легко видеть, что это можно сделать в цикле, длина которого равна $(N-1)$.

II тур. При решении этой задачи важное значение имеет структура данных, используемая для формального описания компостера и конфигурации отверстий в билете. Для этих целей лучше использовать матричное представление. В частности, в качестве элементов матрицы компостера P (размерность матрицы $S\times S$) необходимо взять квадраты расстояний между центрами соответствующих штырей. Эта матрица является симметричной с нулевыми элементами на главной диагонали. То же самое можно сказать и о матрице билета R (размерность матрицы $N\times N$).

Для решения п. А задания матрицу P можно не использовать, так как компостер в этом случае будет однозначно определяться только квадратом расстояния $S0$ между центрами двух штырей. Возможность пробивки данным компостером заданной конфигурации отверстий в билете (см. п. 1) связана с наличием величины $S0$ в каждой строке матрицы R. Это можно проверить, анализируя последовательно строки матрицы R, начиная с первой. Просмотр можно ускорить, исключая из последующего рассмотрения строки, номера которых совпадают с номерами позиций элементов $S0$ в текущей строке. При определении числа компостеров K, с помощью которых можно пробить заданную конфигурацию отверстий в билете (см. п. 2), необходимо учитывать тот факт, что возможный компостер характеризуется одним из элементов первой строки матрицы R. Выполнив для каждого элемента этой строки первый пункт задания А, можно определить искомое число K. Если $K=0$, то для нахождения компостера, обеспечивающего пробивку максимального количества отверстий в билете (см. п. 3), необходимо для каждого элемента матрицы R, расположенного слева от главной диагонали (таких элементов будет $N\times\times(N-1)/2$), подсчитать, в скольких строках этой матрицы он содержится. Элемент, имеющий максимальное значение этой величины, будет соответствовать искомому компостеру. Требуемое в п. 4 минимальное число нажатий для пробивки всех отверстий в билете заданным компостером $S0$ определяется из условия минимизации количества повторных пробивок одних и тех же отверстий. В худшем случае билет пробивается за $(N-1)$ нажатие, в лучшем за $[(N+1)/2]$ нажатий. Очевидно, что j-ю точку в билете можно пробить однозначно, если в j-й строке матрицы R величина $S0$ встречается один раз. С учетом этого путем целенаправленного перебора можно определить искомое число нажатий.

Выполнение п. Б. задания, в отличие от п. А., существенно усложняется по двум причинам. Во-первых, компостер в этом случае необходимо отображать уже в виде матрицы P размерностью $S\times S$, а во-вторых, одна и та же конфигурация штырей компостера может описываться различными матрицами P. Последнее также справедливо и для описания конфигурации пробитых отверстий в билете. Исходя из этого, на начальном этапе решения важно установить, каким образом можно определить попадание штырей компостера в отверстие в билете при однократном его нажатии. Анализируя всевозможные ситуации, можно прийти к выводу, что все штыри компостера попадут в какие-либо S отверстий в билете, если в матрице R найдется S различных строк, каждая из которых включает все элементы одной из строк матрицы P, причем между этими строками должно быть взаимно однозначное соответствие. Если хотя бы для одной строки матрицы не удается найти соответствующую строку в матрице R, то можно сразу сказать, что таким компостером нельзя пробить заданную конфигурацию отверстий в билете. В п. 1 этой части задания достаточно определить одно подмножество таких строк в матрице R. Максимально возможное число названных подмножеств равно числу сочетаний из N по S. Если все требуемые подмножества сформировать, то путем перебора $2n-1$ вариантов нажатий (n — число найденных подмножеств), можно решить п. 4. Учитывая сказанное выше, находим решение и для других пунктов этой задачи.

[redacted]ант» для младших школьников
[redacted] «Квант» № 9)

1. Если обозначить веса Малыша, Карлсона, фрекен Бок и торта через M, K, Φ и T, а вес куска торта, съеденного Карлсоном через C, то получим два уравнения: $\Phi+K=M+T$ и $K+C=\Phi+M+T-C$. Заменив во втором уравнении $M+T$ на $\Phi+K$, получим после приведения членов $C=\Phi$.
2. $10247+10247+10247=30741$.
3. У Алеши 5 значков, у Вити — 14.
4. Обозначим через x количество страниц, пройденных Степой с первым милиционером. Сумма номеров x страниц равна $x(x+1):2$, а год рождения каждого из милиционеров, очевидно, не меньше 1900 и не больше 1972. Единственное значение для x, удовлетворяющее этим условиям, есть число 62. При этом первый милиционер родился в 1953 году. Если в книге было y страниц, то год рождения второго милиционера равняется $y(y+1):2-1953$. Единственное значение для y, удовлетворяющее условиям задачи, есть число 88. При этом год рождения второго милиционера 1963.
5. Заметим сначала, что площадь прямоугольника не меньше, чем $p-1$ (p — полупериметр прямоугольника), если каждая его сторона не меньше 1. Действительно, если a — бо́льшая сторона прямоугольника, то $p\geqslant a+1$. Умножив обе части неравенства на положительное число $a-1$, получим неравенство $pa-p\geqslant a^2-1$. Оно равносильно неравенству $a(p-a)\geqslant p-1$, где слева стоит площадь прямоугольника, а справа указанная оценка. Заметим, что неравенство превращается в равенство только в том случае, если меньшая сторона прямоугольника равна 1. Поскольку сумма площадей прямоугольников равна 100, то сумма их полупериметров не больше 120, а сумма периметров не больше 240 и равняется 240, если в каждом прямоугольнике меньшая сторона равна 1, но сумма периметров прямоугольников действительно равняется 240, поскольку она равна периметру квадрата — 40 плюс удвоенная длина пропилов — 200.

[redacted]ебраические уравнения [redacted]равенства
(см. «Квант», № 9)

1. а) -3; $-1/3$; б) $[-4]\cup[-1;\ 0]$; в) $1/2$; $(-1\pm\sqrt{2})/2$.

Указание. Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух систем: $f(x)=g(x)$, $g(x)\geqslant 0$ и $f(x)=-g(x)$, $g(x)>0$; г) $-1/4$; 0; д) $1/6$; $1/2$; $3/2$; е) -5; 1. Указание. Воспользуйтесь указанием к п. в) (дважды); ж) $-\sqrt[3]{3}$; 0. См. указание к пункту в).

2. а) -1; -1992. Указание. Корень $x=-1$ угадывается легко. Второй корень находится с помощью теоремы Виета; б) $1/1992$; 1; в) $1\pm\sqrt{2}$; $1\pm\sqrt{3}$. Указание. Выполните замену $y=x^2-2x$; г) -2; 1. Указание. Преобразуйте уравнение к виду

$$\frac{2(x^2+x)+1}{(x^2+x)^2}=\frac{5}{4}$$

и выполните замену $y=x^2+x$; д) -1; 3. Указание. Замена $y=x^2-2x$; е) -2; 3. Указание. Замена $y=x^2-x$; ж) $2\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{2}$. Указание. Поскольку $x\neq 1$, можно разделить обе части уравнения на $(x-1)^2$ и выполнить замену

$$y=(x^2-3x+1)/(x-1);$$

з) $3\pm\sqrt{7}$; $(-1\pm\sqrt{21})/2$. Указание. Заметив, что $x^2-4=(x^2-5x+1)+5(x-1)$, воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче; и) 1. Указание. Замена $y=x+1/x$. к) $(-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$. Указание. Преобразуйте левую часть к виду $x^4+2x^2+1-2x^2+4x-1=(x^2+1)^2-2(x-1)^2$.

3. а) 3; б) 3; в) $99/49$; 2. Указание. Здесь удобно выполнить замену $y=\sqrt{x-2}$; г) 1; д) -3; 2; е) -3; ж) 4; 259; з) $1/2$. Указание. Замена $y=\sqrt{12+16x-16x^2}$; и) 1. Указание. Заменой $y=\sqrt[3]{x-9}$ уравнение приводится к виду $\sqrt[3]{y^3+16}=4+y$; к) -1; $-1/2$; 0. Указание. Возведем обе части уравнения в куб, пользуясь формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\times(a+b)$, где $a=\sqrt[3]{x+1}$, $b=\sqrt[3]{2x+1}$; л) $-3/4$. Указание. Пользуясь соотношением $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(a-b)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, получаем, что либо $x=-3/4$, либо $\sqrt{5x+7}+\sqrt{x+4}=1$. Но это уравнение не имеет корней, т. к. если $5x+7\geqslant 0$, то $x+4>1$; м) $(-1\pm\sqrt{17})/2$. Указание. Замена $y=x^2+x$; н) 5. Указание. Преобразуйте уравнение к виду $(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+4})=4$, а затем — к виду $\sqrt{2x+3}-3=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+4}$; о) 1. Указание. Перепишите уравнение так:

$$\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x-3}=\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+2},$$

а затем воспользуйтесь указанием к задаче пункта л); п) 1; $(1+\sqrt{5})/2$. Указание. Преобразуем уравнение к виду $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\times\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2$. При $x\neq 1$ правая часть положительна в своей области определения, и поэтому $x>0$. Замечаем, что $x=1$ — корень уравнения, а при $x>1$ после преобразований получаем:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x}.$$

Возводя в квадрат, получаем после замены $y=\sqrt{x^2-x}$ уравнение $y^2-2y+1=0$. Остальное ясно; р) $-\sqrt{2}/2$; $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. Указание. Уравнение равносильно системе $2x\sqrt{1-x^2}=1-8(x^2-x^4)$, $x^2\leqslant 1/2$.

Выполнив замену $y=2x\sqrt{1-x^2}$, получаем, что либо $y=-1$, либо $y=1/2$.

Первый случай дает $x^2=1/2$, $x<0$, т. е. $x=-\sqrt{2}/2$. Во втором случае приходим к биквадратному уравнению $x^4-x^2+1/16=0$, решить которое мы должны с учетом ограничений $0<x<\sqrt{2}/2$;

с) $-1/2$; 3. Указание. Заменой $y=\sqrt{2x+1}$ приводим уравнение к виду $|y-1|+|y-3|=4$;

т) -1. Указание. Все квадратные трехчлены, стоящие под знаком радикала, имеют корень $x=-1$. Уравнение приводится к виду

$$\sqrt{|x+1|}\,(\sqrt{|5x+1|}-\sqrt{|2x+3|})=$$
$$=|x+1|\,(\sqrt{|6x-2|}+\sqrt{|x+6|}),$$

при решении которого следует рассмотреть два случая $x\leqslant-6$ и $x\geqslant1/3$ и убедиться, что оно корней не имеет.

4. а) $[-1;\ 3]$; б) $(-4/5;\ 0)$; в) $[1/2;\ +\infty)$; г) $[-2;\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\leqslant v$ равносильно системе $-v\leqslant u\leqslant v$;

д) $(-2-\sqrt{3};\ -2)\cup(-2;\ -2+\sqrt{3})\cup(2-\sqrt{3};\ 2)\cup\cup(2;\ 2+\sqrt{3})$. Указание. Выполните замену $y=|x|$ и воспользуйтесь указанием к задаче пункта г);

е) $[3-2\sqrt{3};\ 1]\cup[3;\ 3+2\sqrt{3}]$;

ж) $(-\infty;\ -2+\sqrt{6})\cup[-1+\sqrt{3};\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\geqslant v$ равносильно совокупности неравенств: $u\geqslant v$ и $u\leqslant-v$;

з) $(-\infty;\ -2]\cup[(2-\sqrt{10})/3;\ 0]\cup[(2+\sqrt{10})/3;\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\geqslant|v|$ равносильно неравенству $(u-v)(u+v)\geqslant0$;

и) $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ +\infty)$;

к) $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ 1/2]\cup[1;\ +\infty)$. Указание. См. указание к задаче пункта з); л) $[1;\ +\infty)$; м) $(-\infty;\ 1]$.

5. а) $(-\infty;\ -6]\cup[0;\ 6]$; б) $[1-\sqrt{5};\ 0]\cup\cup[2;\ 1+\sqrt{5}]$. Указание. Выполните замену $y=x^2-2x$;

в) $(-2;\ -1/3)\cup(1/2;\ +\infty)$;

г) $(-2;\ -(1+\sqrt{7})/3)\cup(0;\ (\sqrt{7}-1)/3)\cup(1;\ +\infty)$;

д) $(-\infty;\ -(1+\sqrt{5})/2)\cup[0;\ (\sqrt{5}-1)/2)$;

е) $(-\infty;\ -(1+\sqrt{17})/4)\cup(-1;\ (1-\sqrt{37})/6)\cup\cup(1-\sqrt{2};\ (\sqrt{17}-1)/4)\cup(1;\ (1+\sqrt{37})/6)\cup(1+\sqrt{2};\ +\infty)$. Указание. Заметим, что $x=0$ удовлетворяет неравенству, при $x\neq0$ выполним замену $y=x-1/x$, после чего неравенство приводится к виду

$$(y-1)/(2y+1)>1/(3y-1);$$

ж) $[-4;\ -3)\cup[-3/2;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$. Указание. Преобразуя левую часть, получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{(2x+3)(x-1)(x+4)}{x(x+3)}\geqslant0;$$

з) $(-6;\ 6(1-\sqrt{26})/5)\cup(0;\ 6)\cup(6(1+\sqrt{26})/5;\ 9)\cup\cup(9;\ +\infty)$. Указание. Поскольку

$$2\,\frac{x^2+36}{x^2-36}=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6},$$

перепишем неравенство так:

$$\frac{x+6}{x-6}\left(\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2-1\right)+\frac{x-6}{x+6}\left(\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right)>0,$$

или

$$\frac{4x(9(x-6)^2(x+4)^2-4(x+6)^2(x-9)^2}{(x^2-36)(x+4)^2(x-9)^2}>0.$$

После этого разложение на множители становится очевидным.

6. а) $[-2;\ 2)$; б) $[-5/4;\ 5)$; в) $(-\infty;\ -1/2)$; г) $(22;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -3]\cup[22;\ +\infty)$;

е) $(0;\ 3+2\sqrt{5})$;

ж) $[-2;\ -1)\cup[(-1+\sqrt{7})/2;\ 2]$;

з) $(-\infty;\ -5)\cup[-4{,}1;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$;

и) $(-(3+\sqrt{5})/2;\ 1]$;

к) $[-3/2;\ -1)\cup(1;\ 2]$. Указание. Рассмотрите отдельно случаи $x<-3/2$, $x=-3/2$ и $x>-3/2$;

л) $(-\infty;\ -1]\cup(6;\ +\infty)$. Указание. Рассмотрите случаи $x>6$ и $x<6$.

м) $[2{,}5;\ 3)$. Указание. Эту задачу можно решить обычным способом, т. е. избавляясь от радикалов. Однако у нее есть совсем короткое решение. Заметим, что при $x=3$ левая часть неравенства равна правой. После этого перенесем $\sqrt{x+1}$ в левую часть и перепишем неравенство так:

$$5/(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1})>\sqrt{2x-5}.$$

Функция в левой части убывающая, а в правой — возрастающая и при $x=3$ левая часть равна правой. Следовательно, неравенство справедливо при $2{,}5\leqslant x<3$;

н) $[-5;\ -(9+\sqrt{61})/8)$. Указание. Заменой $y=\sqrt{x+5}$, неравенство приводится к виду $\sqrt{16-3y^2}>1+y$, откуда $0\leqslant y<(\sqrt{61}-1)/4$;

о) $[3;\ (1+\sqrt{37})/2)\cup((1+\sqrt{37})/2;\ +\infty)$. Указание. Нетрудно убедиться, что данное неравенство не имеет решений при $x<3$. Если $x\geqslant3$, перепишем его в виде $\sqrt{x-9/x}<x-\sqrt{9-9/x}$, после чего возведем в квадрат (при $x=3$ правая часть положительна!), а затем сделаем замену $y=\sqrt{x^2-x}$;

п) $(\sqrt[3]{5/4};\ +\infty)$. Указание. Непосредственно видно, что $x>1$. После возведения в квадрат и упрощений приходим к неравенству $\sqrt{x^6-1}>2-x^3$, заведомо справедливому при $x>\sqrt[3]{2}$. При $1<x\leqslant\sqrt[3]{2}$ получаем после возведения в квадрат и упрощений неравенство $4x^3>5$.

Московская математическая олимпиада

(см. «Квант» № 9)

8 класс

1. Из условия сразу следует, что $a+b>c+d$ и $a+b>-(c+d)$. Поэтому $a+b>|c+d|$.

2. Ответ: нет. Все черные клетки доски образуют как 8 диагоналей, показанных на ри-

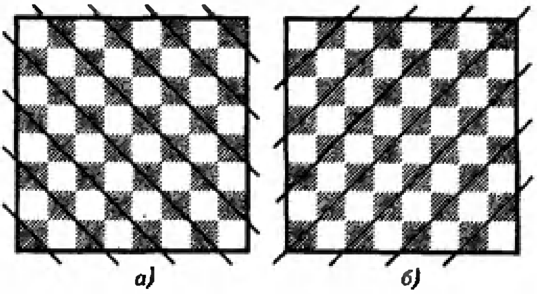


Рис. 7.

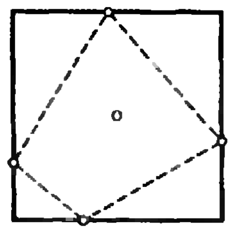


Рис. 9.

сунке 7, *а*, так и 7 диагоналей, показанных на рисунке 7, *б*. Хотя бы на одной из черных диагоналей число фигур должно быть четным, поскольку сумма 8 нечетных чисел не может равняться сумме 7 нечетных чисел.

3. Каждый участник решил ровно столько задач, сколько получится, если суммировать количество решенных во второй день задач по всем участникам олимпиады.

4. О т в е т: 9 гирь, например 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 12 г. Докажем, что в наборе должно быть не менее 9 гирь. Для удобства общий вес гирь примем равным 60 г; кучки будут 20-, 15- и 12-граммовые. Каждая гиря весит не более 12 г, поэтому каждая из 15-граммовых кучек содержит не менее двух гирь. Число гирь в наборе, таким образом, не менее 8.

Допустим, что гирь ровно 8. Отметим гири, масса которых (в граммах) не является целым числом, делящимся на 3; такие гири есть, поскольку возможно разложение на 20-граммовые кучки. В каждой 15-граммовой кучке обе гири должны быть отмечены либо не отмечены одновременно, откуда среднее арифметическое масс отмеченных гирь — 7,5 г. Но, с другой стороны, это среднее арифметическое не может превышать 6 г, поскольку в каждой 12-граммовой кучке, имеющей отмеченные гири, число последних не менее двух. Противоречие.

5. У к а з а н и е. На рисунке 8 угол B треугольника ABC — прямой, BD — его биссектриса, A' и C' — проекции на прямую BD точек A и C соответственно; для определенности полагаем $AB \leqslant BC$. Из подобия треугольников $AA'D$ и $CC'D$ получаем $A'D \leqslant DC'$,

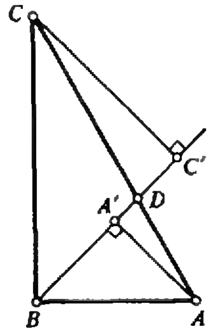


Рис. 8.

откуда $BD \leqslant \frac{1}{2}(BA'+BC') = \frac{1}{2}(AA'+CC')$. Но $AA'+CC'$ и есть длина проекции гипотенузы на любую прямую, перпендикулярную BD.

6. Решение этой задачи (частный случай задачи М1363) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

9 к л а с с

1. Любой участник выиграл ровно столько партий, сколько партий в соревновании закончились победой черных.

2. О т в е т: поровну. У к а з а н и е. Разбив числа на пары $(n_1; n_2)$, для которых $n_1+n_2=10\,000$, заметим, что $n_1^9+n_2^9$ делится на n_1+n_2 и, следовательно, на 10 000. Поэтому для чисел m_1 и m_2, образованных четверками последних цифр чисел n_1^9 и n_2^9, имеем $m_1+m_2=10\,000$, откуда следует, что неравенство $n_1>m_1$ равносильно неравенству $m_2>n_2$.

3. О т в е т: нет. У к а з а н и е. После каждого отрезания остается выпуклый многоугольник, у которого какие-то 4 стороны лежат на сторонах исходного квадрата. Поэтому всегда можно выбрать по одной неотрезанной точке на каждой из сторон квадрата. Четырехугольник (обозначенный на рисунке 9 пунктиром) с вершинами в таких точках целиком лежит в

1	1	8	39	39	114	339	339	678
1		7	31		75	225		339
1	2	7	24	41	75	150	225	339
1	1	5	17	17	34	75	75	114
1		4	12		17	41		39
1	2	4	8	12	17	24	31	39
1	1	2	4	4	5	7	7	8
1		1	2		1	2		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 10.

неотрезанной части и содержит центр квадрата.

4. Ответ: 678 путями. Это видно из рисунка 10, где в каждой клетке написано, сколько путей ведут в нее из левой нижней клетки таблицы (в каждой клетке записана сумма чисел в соседних клетках слева и снизу от нее).

5. Указание. Достаточно доказать, что прямая AB делит пополам отрезок FG, параллельный отрезку DE (рис. 11). Для этого заметим, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5$ и $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$, откуда $\triangle BCG=\triangle BCD$ и $BG=BD=BF$.

6. Решение этой задачи (задача M1363) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

10 класс

1. Если α, β, γ, δ — углы четырехугольника, то $0=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$$

$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2},$$

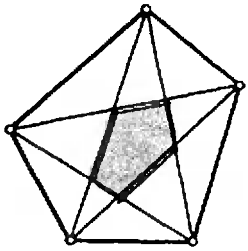
откуда либо $\alpha+\beta=180^\circ$, либо $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$, либо $\alpha+\gamma=\beta+\gamma=180^\circ$.

2. Ответ: в пятиугольник, закрашенный на рисунке 12. Указание. Очевидно, что поставленная не в заштрихованную область свечка отрезается. Доказательство того, что в заштрихованной области свечка не может быть отрезана, основано на идее решения задачи для 9 класса (там у нас область состояла всего из одной точки).

3. Ответ: если сумма $m+n$ нечетна, то обеспечить себе выигрыш могут белые, в противном случае — черные.

Указание. Белые выигрывают (когда $m+n$ нечетно), следуя плану: 1) встать на одну диагональ с черной фишкой (это достигается за $|m-n|$ ходов); 2) делать ходы всегда на ту диагональ, где стоит черная фишка, приближаясь к ней. Если же $m+n$ четно, то после первого сделанного белыми хода указанную стратегию могут применить черные.

4. Ответ: 11 гирь, например 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10 г. Минимальность числа гирь можно доказать так же, как и в задаче 4 для 8 класса. (При общей массе гирь 60 г кучки будут 15-, 12- и 10-граммовыми, а те гири, масса которых не выражается целым четным числом граммов, будут отмеченными.)



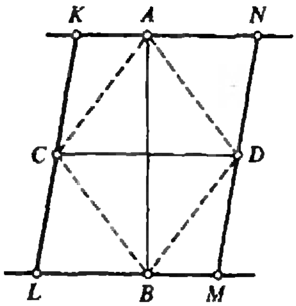


Рис. 12. Рис. 13.

5. Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга точки многоугольника. Тогда он целиком лежит в полосе AB, а середина отрезка AB — центр симметрии. Пусть C и D — симметричные точки границы многоугольника, лежащие на серединном перпендикуляре к AB. Тогда (в силу выпуклости) многоугольник целиком лежит и в полосе между некоторой прямой KL (содержащей C) и симметричной ей прямой MN (содержащей D), т. е. помещается в параллелограмм $KLMN$ (рис. 13). Четырехугольник $ACBD$ — ромб, его площадь равна половине площади $KLMN$ и он целиком лежит в многоугольнике. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

6. Решение этой задачи (задача M1365) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

11 класс

1. а) Ответ: да. Запишем по 1 во все клетки верхней и нижней строк, (—1) в центральную клетку и нули во все остальные. б) Ответ: нет. Раскрасив таблицу в два цвета в шахматном порядке, воспользуемся наблюдениями, сделанными при решении задачи 2 для 8 класса. Сумма всех чисел, записанных в черных клетках, не может равняться 1992 и 1991 одновременно.

2. Ответ: $\angle A=\angle C=70^\circ$, $\angle B=120^\circ$, $\angle D=100^\circ$.

Указание. Проведем окружность через точки A, B и C, тогда точка D окажется внутри круга на диаметре BE (см. рис. 14, где дуга

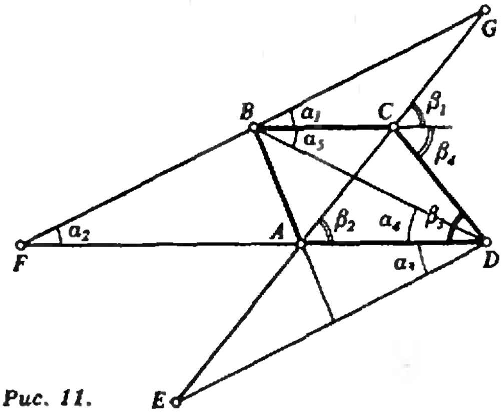


Рис. 11.

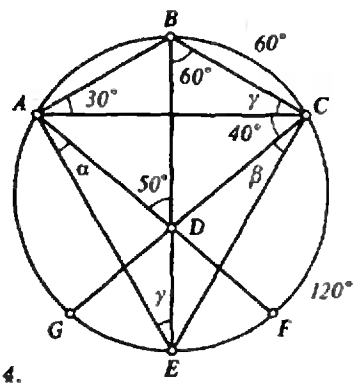


Рис. 14.

BCE равна $60^\circ+120^\circ=180^\circ$). Из равенств $\alpha+\gamma=50^\circ$ и $\beta+40^\circ+\gamma=90^\circ$ имеем $\alpha=\beta$, поэтому F, G, а с ними точки A, C, и весь четырехугольник $ABCD$, симметричны относительно BE.

3. Рассмотрим движущийся диаметр экватора, всегда проходящий через точку, в которой находится Аладдин. Пусть K — фиксированный конец этого диаметра. Точка K движется по экватору непрерывно и всегда в том же направлении, что и Аладдин. Множество точек, пробегаемое K,— дуга, составляющая не менее половины экватора. (Противоположный конец диаметра пробегает симметричную дугу, а обе такие дуги вместе должны содержать все точки экватора.) Выберем на этой дуге точки A и B такие, что длина дуги AB больше 0,449 длины экватора. Отрезок времени между моментами прохождения точек A и B точкой K и является искомым.

4. Рассмотрим единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$, перпендикулярные граням тетраэдра и направленные внутрь него. Пусть $\vec{a}$ — вектор, перпендикулярный данному треугольнику и по длине равный его площади. Тогда $P_i=|(\vec{a}, \vec{e_i})|$ для $i=1, 2, 3, 4$. Умножив равенство $S_1\vec{e_1}+S_2\vec{e_2}+S_3\vec{e_3}+S_4\vec{e_4}=0$ скалярно на $\vec{a}$, получим

$$P_1S_1=|(\vec{a}, S_1\vec{e_1})|=|-(\vec{a}, S_2\vec{e_2})-(\vec{a}, S_3\vec{e_3})-$$
$$-(\vec{a}, S_4\vec{e_4})|\leqslant P_2S_2+P_3S_3+P_4S_4.$$

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

6. а) Прибор получает серию пар: $\log_{25}75$ и $\log_{65}260$, $\log_{25}3$ и $\log_{65}4$; $\log_4 65$ и $\log_3 25$; $\log_4(65/4)$ и $\log_3(25/3)$; $\log_4(65/16)$ и $\log_3(25/9)$. Так как $65/16>4$ и $25/9<3$, то после последней пары будет выдан ответ (левое число больше правого).

б) Предположив, что прибор бесконечно долго сравнивает числа $x_1=\log_a b<\log_c d=y_1$, возьмем натуральные числа m_0, m_1, для которых $x_1<m_0/m_1<y_1$. Тогда, применив несколько раз первое правило, прибор перейдет к числам $\{x_1\}<\{y_1\}$, где $\{a\}$ означает дробную часть числа a. Между $\{x_1\}$ и $\{y_1\}$ лежит число m_2/m_1, где $0<m_2<m_1$, число m_2 — натуральное. Применив второе правило, прибор перейдет к числам $x_2=1/\{y_1\}<y_2=1/\{x_2\}$, между которыми лежит число m_1/m_2. Далее снова применяется первое правило и т. д. Но тогда получается убывающая последовательность натуральных чисел m_1, m_2, m_3, ..., которая не может быть бесконечной. Противоречие.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
А. Астрин, Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров, А. Хоменко, П. Чернуский

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

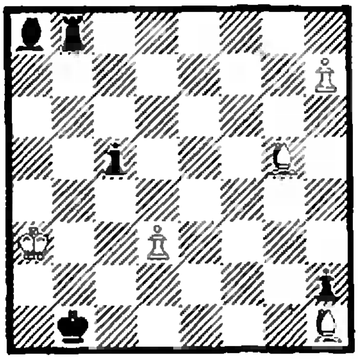
Сдано в набор 29.07.92. Подписано к печати 16.09.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.
Тираж [illegible] экз. Заказ 987. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

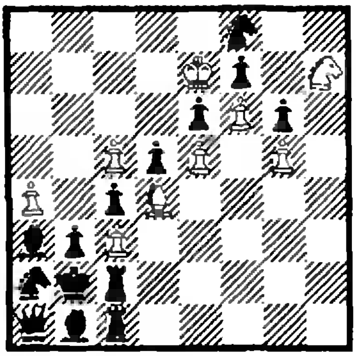
ПО ПРОТОРЕННОЙ ДОРОЖКЕ

Вернемся к теме симметрии, начатой нами в прошлый раз. Вот еще пример, в котором одна из сторон (белые) копирует, словно обезьяна, ходы противника.



П. Жойца, 1972
Ничья

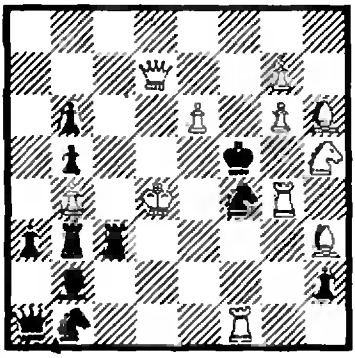
После короткого вступления **1. Cf4 Лh8 2. Ce5 C:h1** белые начинают дублировать ходы черных. **3. C:h8 Ca8! 4. Ca1! h1Ф 5. h8Ф Фb7 6. Фb2+!** В этом все дело — если бы на 4-м ходу слон отошел в другое место, белые сейчас были бы беззащитны. **6... Ф:b2 7. C:b2. Ничья.** Чернопольный слон проложил дорогу своему ферзю. Эта тема в задачной композиции называется бристольской прокладкой пути.



Д. Бебеши, 1955
Кооперативный мат в 4 хода

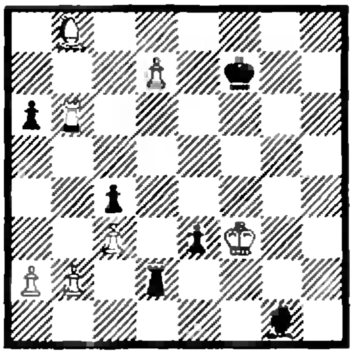
Как мы знаем, в кооперативной задаче начинают черные, которые помогают белым поставить мат. **1. Kd7 Kf8 2. Kb6 Kd7 3. K:a4 Kb6 4. K:c3 Ka4×.** Мы видим уникальную скачку коней: не успевает черный конь освободить какое-то поле, как тут же его место занимает белый конь. Забавное преследование, редкое даже для этюда.

«Обезьянья» тема ярко проявляется в дуэли двух фигур, представленной в разных вариантах. Здесь и всевозможные «кресты», «звездочки», параллельные танцы и «змейки», поединки пешек, апогеем которых является четырехкратное превращение в четыре разные фигуры — ферзя, ладью, слона и коня.



Я. Кноппель, 1972
Обратный мат в 2 хода

В задаче на обратный мат начинают белые, которые заставляют черных поставить мат. Идея белых — вынудить ладью c3 сделать ход, объявляя мат. Решает превращение пешки «g», но в какую фигуру? Допустим, белая пешка становится ладьей — 1. g8Л с угрозой 2. Лh4+ — пешка g6 защищена и приходится играть 2... Л:h4×. Однако в ответ и черная пешка становится ладьей — 1... h1Л!, нарушая замысел белых. Пусть теперь белая пешка превращается в слона — 1. g8C — пешка e6 защищена и грозит 2. Ф:b5+ Лc5×. Но вновь и черная пешка обезьянничает — 1... h1C! и на 2. Ф:b5+ следует 2... Cd5. Идем дальше — 1. g8K с угрозой 2. Kg3+ Л:g3×. Читатель уже догадался, что у черных есть ответ 1... h1K! Правильно только **1. g8Ф!** с двумя угрозами — 2. Лh4+ и 2. Ф:b5+, а копирование **1... h1Ф** на сей раз парируется — **2. Фd5+ Ф:d5×.**



Доннели — Левис, 1965

Экзотический эпизод турнирной борьбы. Вместо 1... Л:d7 с простой ничьей черные решили схитрить, сыграв 1... e2 в расчете на 2. d8Ф? e1K+! и 3... Л:d8. Однако белые сами превратили пешку в коня — **2. d8K+! Крe7 3. Лe6+ Кр:d8 4. Л:e2 Л:e2 5. Кр:e2** и черным предстояла нелегкая борьба за ничью.

Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

ТЕТРАЭДР ИЗ КУБИКОВ

Американский математик Стюарт Коффин периодически удивляет мир своими оригинальными головоломками. Сегодня вы видите на рисунке его очередное изобретение. Из 10 одинаковых кубиков склеены 3 детали, а из них собрана треугольная пирамида. Пирамиду из 10 отдельных кубиков сложит любой ребенок, нетрудно и разобрать головоломку Коффина на 3 части, но вот правильно соединить между собой 3 детали и собрать пирамиду заново оказывается очень трудной задачей. Вы можете убедиться в этом сами. Возьмите 10 готовых кубиков или склейте их из плотной бумаги или картона. Проекции деталей, показанные внизу, содержат всю необходимую информацию для склеивания трех деталей из 10 кубиков. Кубики склеивают со сдвигом в 1/2 ребра. Очень важно, чтобы все кубики были в точности одинаковы по размеру, иначе вы будете обречены никогда не увидеть свою головоломку решенной. Когда покорите пирамиду Коффина, попробуйте изобрести собственные конструкции. Измените конфигурацию деталей из кубиков. Придумайте детали, из которых можно собрать головоломки в форме четырехугольной пирамиды, октаэдра или шарообразного тела. Ваши модели присылайте в редакцию в раздел «Коллекция головоломок», который появится в нашем журнале в 1993 году.